This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

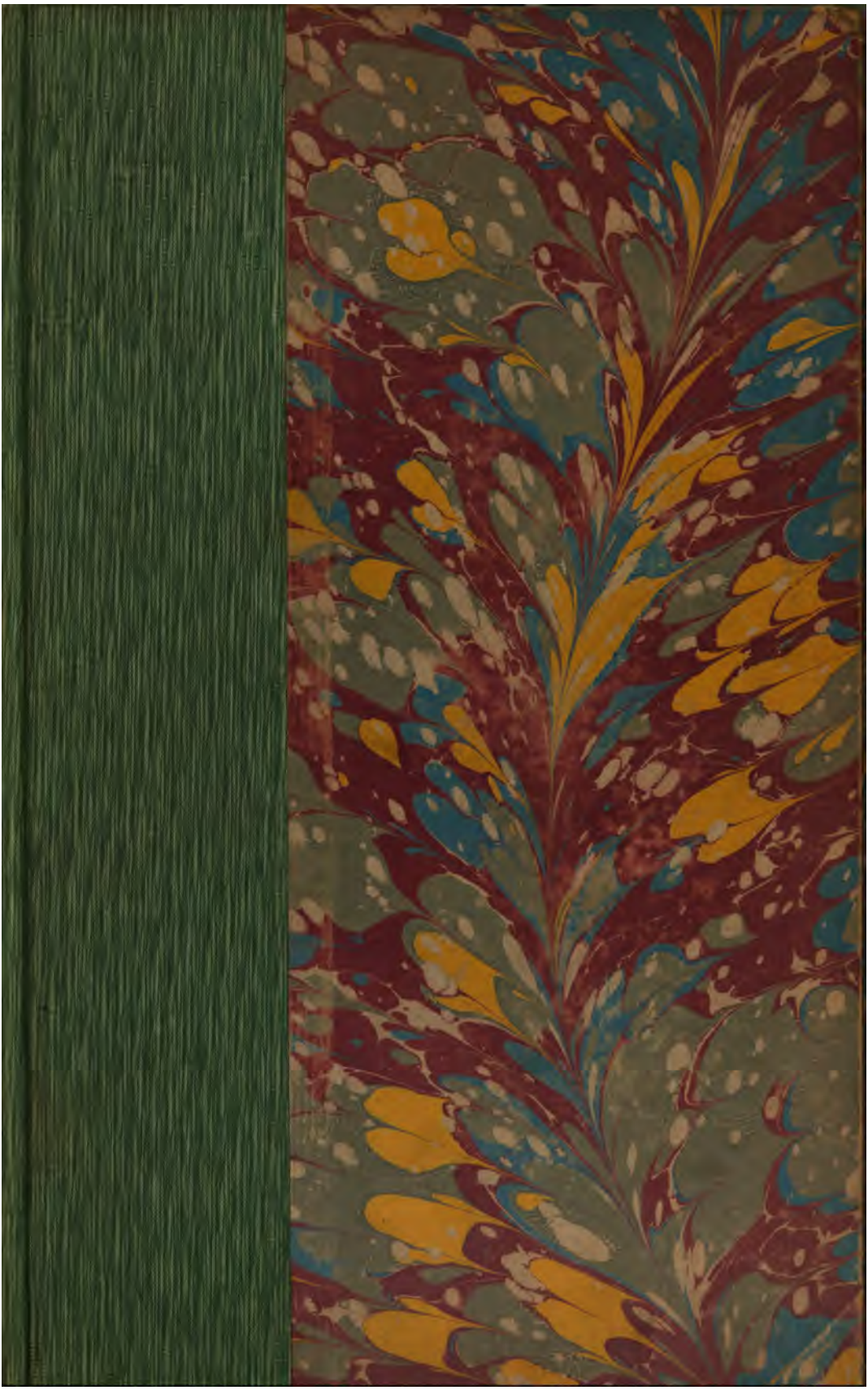
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



Math 5709.08

SCIENCE CENTER LIBRARY

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTI

PAR

T. CHOLLET & **P. MINEUR**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE D'ORLÉANS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQU
PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN

DEUXIÈME PARTIE

A L'USAGE

des Élèves des Classes de Mathématiques A *et* B

TROISIÈME ÉDITION

conforme au Programme du 27 juillet 1905.

PARIS

VUIBERT ET NONY ÉDITEURS

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1908

(Tous droits réservés.)

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

(*Deuxième partie*)

TRAITÉS DE MATHÉMATIQUES

conformes aux programmes du 27 juillet 1905.

(Vol. 22/14cm, brochés.)

Arithmétique (Classes de Mathématiques A et B) par A. Grévy, docteur ès sciences, professeur au lycée Saint-Louis . 2 fr. 50

Algèbre (cl. de Mathématiques A et B), par A. Grévy . 6 fr. »

Géométrie, par A. Grévy. — 3 vol. . . . . 7 fr. »

On vend séparément :

Géométrie plane (classes de 2e C et D) . . . . . 3 fr. »
Géométrie dans l'espace (classes de 1re C et D) . . . 2 fr. »
Compléments de Géométrie (cl. de Math. A et B) . . . 2 fr. »

Trigonométrie (classes de 1re C et D et de Math. A et B), par A. Grévy. — Vol. 18/12cm, cart. toile . . . . . 2 fr. 25

Géométrie descriptive, par T. Chollet, professeur agrégé au lycée d'Orléans, et P. Mineur, professeur agrégé au collège Rollin :

I. Classes de Première C et D. . . . . 3 fr. 50
II. Classes de Mathématiques A et B. . . . . 3 fr. »

Mécanique (classes de Math. A et B), par C. Guichard, membre correspondant de l'Institut, professeur à l'Université de Clermont . . . . . 3 fr. »

Cosmographie (classes de Math. A et B), par A. Grignon. — Vol. illustré, avec 11 planches hors texte et carte céleste . . 3 fr. »

Traité de Géométrie, 3e édition conforme au programme du 27 juillet 1905 (classes de Seconde et Première C et D et Mathématiques A et B), par C. Guichard. — Volume 22/14cm. . . . 6 fr. »

Méthodes de Résolution et de Discussion des Problèmes de Géométrie, par G. Lemaire. — Vol. 22/14cm . . . . . 2 fr 50

Questions d'Algèbre élémentaire (Homogénéité, Symétrie, Calcul rapide), par G. Lemaire. — Vol. 22/14cm . . . . . 2 fr. 50

Vient de paraître :

Lecture et Emploi de la carte d'État-Major, par P. Grésillon, capitaine d'artillerie, — Vol. 18/12cm, avec figures et trois planches hors texte et un tableau des signes et abréviations pour la lecture de la carte de France au 80 000e . . . . . 1 fr. 50

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

T. CHOLLET & **P. MINEUR**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR AU LYCÉE D'ORLÉANS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN

DEUXIÈME PARTIE

A L'USAGE

des Élèves des Classes de Mathématiques A *et* B.

TROISIÈME ÉDITION

conforme au Programme du 27 juillet 1905.

PARIS

VUIBERT ET NONY ÉDITEURS

63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1908

(Tous droits réservés.)

Math. 5709.08

Gift fund

PROGRAMME OFFICIEL

Rabattements. Changement d'un plan de projection ; rotation autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection.

Application aux distances et aux angles ; distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; plus courte distance de deux droites, dont l'une est verticale ou de bout ou de deux droites parallèles à un même plan de projection ; perpendiculaire commune à ces droites. Angle de deux droites ; angle d'une droite et d'un plan ; angle de deux plans.

Projection du cercle. Sphère ; section plane, intersection avec une droite. Cône et cylindre à directrice circulaire ; plan tangent passant par un point ou parallèle à une droite ; ombres ; contours apparents ; sections planes. Cônes et cylindres circonscrits à la sphère. Ombres.

Représentation d'une surface par des courbes de niveau. Cote d'un point de la surface dont la projection horizontale est donnée. Pente d'une ligne tracée sur une surface. Lignes d'égale pente. Lignes de plus grande pente.

Application des considérations précédentes aux cartes topographiques.

Planimétrie et nivellement. Signes et teintes conventionnels. Lecture d'une carte et en particulier de la carte d'État-major. Usage de la carte sur le terrain.

Les nos de renvois entre parenthèses qui sont précédés du chiffre romain I se rapportent aux paragraphes de la première partie de l'ouvrage.

Les parties imprimées en petit caractère sont des applications qu'on peut, sans inconvénient, négliger dans une première lecture.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

(*Seconde partie : Classes de Mathématiques* A *et* B)

CHAPITRE I

RABATTEMENT D'UNE FIGURE PLANE SUR UN PLAN DE FRONT

---

§ I.

Théorie du rabattement.

1. *Rabattre un plan sur un autre*, c'est faire tourner ce plan autour de son intersection avec le second de manière à l'amener en coïncidence avec celui-ci. La droite d'intersection des deux plans est appelée la *charnière du rabattement*.

Nous avons étudié dans la première partie (nos 176 et suivants) le rabattement d'un plan sur un plan horizontal.

2. Il n'est pas moins utile de savoir *rabattre un plan donné sur un plan de front*.

Le problème à résoudre consiste alors à *trouver la nouvelle projection verticale d'un point du plan donné, après qu'on a rabattu ce plan sur un plan de front ou sur le plan vertical de projection*.

La *charnière* est la droite de front, intersection du plan donné avec le plan de front sur lequel on fait le rabattement.

Par un raisonnement en tous points semblable à celui que nous avons fait dans le cas du rabattement sur un plan horizontal (I, 176), on est conduit à la règle suivante :

Règle du triangle rectangle. — *Lorsqu'on rabat un plan* P *autour d'une de ses lignes de front, la nouvelle projection verticale d'un point* M *de ce plan, après le rabattement, se trouve sur la perpendiculaire menée de la projection verticale du point* M *sur la projection verticale de la charnière à une distance de celle-ci égale à l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les distances des projections du point aux projections de même nom de la charnière.*

3. **Problème.** — *Soit à rabattre autour de la frontale* $(ab, a'b')$ *le plan* P *déterminé par cette frontale et le point* (m, m') (*fig.* 1).

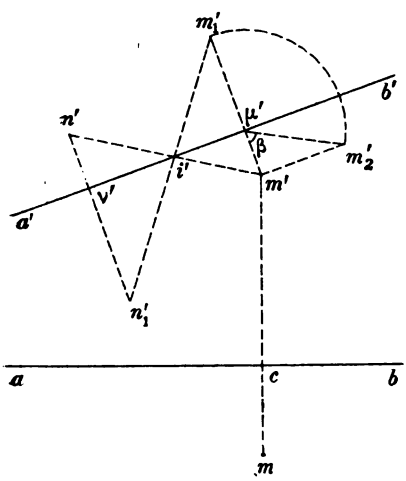


Fig. 1

En vertu de la règle précédente, le rabattement du point (m, m') est sur la perpendiculaire $m'\mu'$ menée du point m' à la projection verticale $a'b'$ de la charnière ; d'autre part, les distances des projections du point (m, m') aux projections de même nom de la charnière sont respectivement les longueurs $m'\mu'$ et mc ; donc, si l'on porte à partir de m', sur la parallèle menée par ce point à $a'b'$, une longueur $m'm'_2 = mc$, le triangle rectangle $m'\mu'm'_2$ est le triangle de rabattement du point donné ; pour avoir la projection verticale de ce point après le rabattement, il suffit donc, d'après la règle du n° 2, de porter sur la droite $m'\mu'$ à partir du point μ', une longueur $\mu'm'_1 = \mu'm'_2$; m'_1 est le rabattement cherché. Suivant le sens du rabattement, cette longueur peut être portée dans un sens ou dans l'autre, à partir du point μ'.

Remarque I. — On démontre par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas du rabattement sur un plan horizontal (I, 178, Rem. II), que l'angle $m'_2\mu'm'$ est égal à l'angle aigu β du plan donné P avec le plan vertical et les divers plans de front. Il en résulte que les triangles de rabattement de tous les points d'un même plan ont leurs angles aigus égaux et par suite sont semblables entre eux ; il en résulte encore que la construction du rabattement d'un seul point du plan P détermine incidemment l'angle de ce plan avec le plan vertical.

Remarque II. — Proposons-nous de déterminer le rabattement d'un deuxième point N du même plan en nous donnant, par exemple, sa projection verticale n'. La droite MN rencontre la charnière en un point dont la projection verticale i' est à l'intersection de $a'b'$ et de $m'n'$; dans le rabattement, ce point reste immobile et la droite considérée est rabattue suivant m'_1i' ; or, le rabattement du point projeté verticalement en n' se trouve évidemment sur m'_1i', et d'autre part, il se trouve aussi sur la perpendiculaire $n'v'$ à la projection verticale de la charnière ; ce rabattement est donc le point de rencontre n'_1 des droites m'_1i' et $n'v'$.

4. Problème. — *Rabattre sur le plan vertical de projection un plan défini par ses traces.*

Soient un plan PαQ défini par ses traces (*fig.* 2) et (ab, $a'b'$) une droite quelconque de ce plan. Proposons-nous de chercher le rabattement d'un point (m, m') de cette droite, lorsqu'on rabat le plan donné sur le plan vertical de projection.

Rabattons d'abord la trace horizontale αP ; pour cela, remarquons que le point α situé sur la charnière αQ ne bouge pas ; il suffit donc de chercher le rabattement d'un seul point (b, b') de la trace horizontale. Or, la distance du point α au point (b, b') est évidemment égale à αb ; d'autre part, le segment (αb, $\alpha b'$) se rabat en vraie grandeur ; par suite, le rabattement du point (b, b') est le point b'_1, situé à l'intersection de la circonférence de centre α et de rayon αb, avec la perpendiculaire abaissée de b' sur la charnière αQ (2). Le rabattement $\alpha P'_1$ de la trace horizontale du plan s'obtient en joignant les points α et b'_1.

1° Cela fait, joignons le point (b, b') (*fig.* 2) au point (m, m') ; la droite (bm, $b'm'$) a pour trace verticale le point (a, a'). Ce point situé

sur la charnière ne bouge pas pendant le rabattement, il en résulte immédiatement que la droite $(ab, a'b')$ est rabattue suivant $a'b'_1$; le

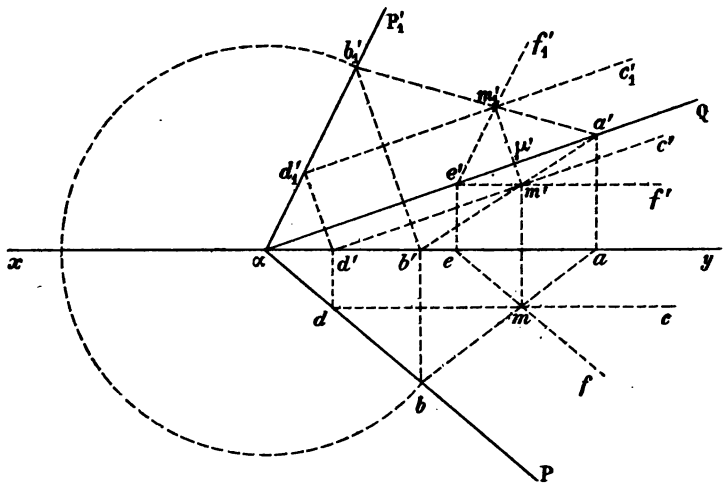


Fig. 2

rabattement du point (m, m') est alors (3, Rem. II) le point de rencontre m'_1 de $a'b'_1$ avec la perpendiculaire $m'\mu'$ abaissée de m' sur la charnière αQ.

2° Une fois tracé le rabattement $\alpha P'_1$ de la trace horizontale, pour obtenir le rabattement du point (m, m'), on pourrait encore utiliser la frontale $(cd, c'd')$ passant par ce point ; en effet, d'une part, la trace horizontale (d, d') de cette droite est rabattue en d'_1 à l'intersection de $\alpha P'_1$ et de la perpendiculaire abaissée du point d' sur la charnière ; comme d'autre part les frontales du plan sont des parallèles à la charnière, il en résulte que le rabattement de $(cd, c'd')$ est la parallèle $d'_1c'_1$ menée par d'_1 à αQ. Le rabattement du point (m, m') est alors à l'intersection de $m'\mu'$ et de $c'_1d'_1$.

3° Enfin, on pourrait se servir aussi de l'horizontale $(ef, e'f')$ passant par (m, m'). Cette droite rencontre la charnière αQ au point e' qui ne bouge pas pendant le mouvement de rotation du plan, et comme elle est parallèle à la trace horizontale αP, on a immédiatement son rabattement en menant par le point e' la parallèle $e'f'_1$ à $\alpha P'_1$. Le rabattement m'_1 du point (m, m') est alors à l'intersection de $e'f'_1$ et de $m'\mu'$.

5. **Rabattement d'un plan de bout sur le plan vertical de projection ou sur un plan de front.** — En raisonnant comme au n° 184 de la première partie on verra que le rabattement d'un plan de bout sur un plan de front (ou sur le plan vertical de projection) conduit à la règle suivante :

Lorsqu'on rabat un plan de bout sur un plan de front (ou sur le plan vertical de projection), le rabattement de chaque point du plan se fait sur la perpendiculaire élevée de la projection verticale de ce point sur la trace verticale du plan, à une distance de celle-ci égale à la différence des éloignements du point et de la charnière, ou encore à la distance des projections horizontales du point et de la charnière.

6. **Applications.** — I. Soit, par exemple, à trouver (*fig.* 3) le rabattement du point (m, m') appartenant au plan de bout $a'b'$ lorsqu'on rabat ce plan sur le plan de front F. La charnière est ici la

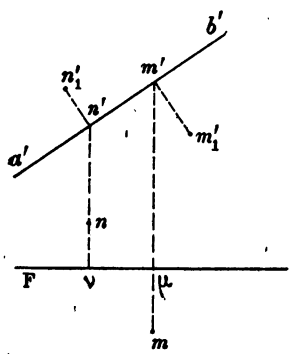


Fig. 3

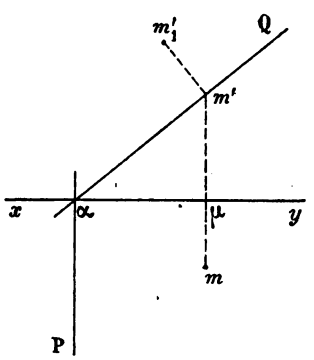


Fig. 4

frontale (F, $a'b'$). En vertu de la règle précédente, le rabattement cherché est le point m'_1 obtenu en portant sur la perpendiculaire élevée en m' à la trace verticale $a'b'$ du plan de bout une longueur $m'm'_1$ égale à la distance $m\mu$ de la projection horizontale du point (m, m') à la projection horizontale F de la charnière.

La longueur $m'm'_1$ peut encore être portée d'un côté ou de l'autre de la charnière suivant le sens du rabattement. D'autre part, la position du rabattement m'_1 du point (m, m') par rapport à $a'b'$ fixe complètement celles des rabattements des autres points du plan.

Aussi, si l'on veut rabattre maintenant le point (n, n'), on remarque que ce point n'est pas situé du même côté que le point (m, m') par rapport au plan de front F sur lequel s'effectue le rabattement ; par suite le rabattement n'_1 de ce nouveau point devra être situé de l'autre côté de $a'b'$ par rapport à m'_1.

II. — Lorsque le rabattement du plan de bout considéré s'effectue sur le plan vertical de projection (*fig.* 4), il n'y a rien à changer à ce qui précède, si ce n'est que la trace horizontale F du plan de front est remplacée par la ligne de terre xy.

III. — Le rabattement d'un *plan de profil* PαQ (*fig.* 5) sur le plan vertical de projection n'est qu'un cas particulier du rabattement d'un plan de bout. Pour obtenir le rabattement m'_1 d'un point (m, m') de ce plan, il suffit de porter sur la perpendiculaire élevée en m' à la trace verticale αQ du plan une longueur $m'm'_1$ égale à l'éloignement αm du point considéré.

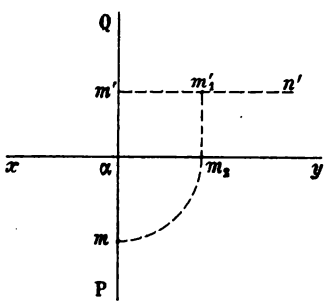


Fig. 5

Graphiquement, on mène par m' la parallèle $m'n'$ à la ligne de terre et du point α comme centre, on décrit l'arc de cercle de rayon αm jusqu'au point m_2 où il rencontre la ligne de terre, puis, par le point m_2, on mène la parallèle à αQ ; le point m'_1 où cette parallèle rencontre $m'n'$ est le rabattement cherché.

§ II.

Problème du relèvement.

7. Le problème général du relèvement peut s'énoncer ainsi :

Un plan P *ayant été rabattu sur un plan de front (ou sur le plan vertical de projection), déterminer les projections d'un point de ce plan, connaissant son rabattement.*

Pour résoudre ce problème, il suffit de faire, *en sens inverse*, les constructions qui donnent le rabattement d'un point. Mais, le plus

souvent, on peut simplifier notablement ces constructions, grâce à certaines remarques exposées au n° 3.

8. **Problème.** — *Relever un plan défini par deux droites concourantes, qui a été préalablement rabattu sur un plan de front.*

Soit le plan P défini par les deux droites concourantes $(oa, o'a')$ et $(ob, o'b')$ (*fig.* 6). Imaginons que ce plan ait été rabattu sur le plan de front F : la charnière est alors la frontale $(ab, a'b')$ du plan P'. Proposons-nous de *déterminer les projections du point* M *de ce plan, rabattu en* m'_1.

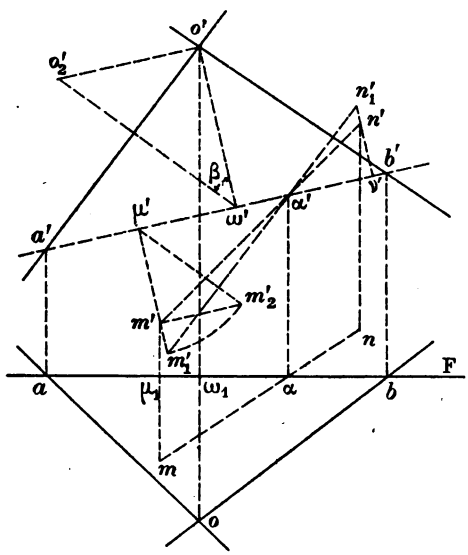


Fig. 6

Construisons d'abord le triangle de rabattement $o'\omega'o'_2$ du point (o, o') en abaissant la perpendiculaire $o'\omega'$ sur $a'b'$ et en portant sur la parallèle menée par o' à $a'b'$ la longueur $o'o'_2$ égale à la distance $o\omega_1$ des projections horizontales du point (o, o') et de la charnière. L'angle $o'\omega'o'_2$ est alors l'angle de rabattement β de tous les points du plan P (3, Rem. I). Par suite, si du point m'_1 on abaisse la perpendiculaire $m'_1\mu'$ sur la projection verticale $a'b'$ de la charnière et si, par le pied μ' de cette perpendiculaire, on mène la parallèle $\mu'm'_2$ à $\omega'o'_2$, la direction de cette parallèle est évidemment celle de l'hypoténuse du triangle de rabattement du point cherché; comme d'autre part, en vertu de la règle du triangle rectangle (2), cette hypoténuse a pour longueur $m'_1\mu'$, si l'on décrit l'arc de cercle de centre μ' et de rayon $\mu'm'_1$, qui coupe $\mu'm'_2$ au point m'_2, et si l'on mène ensuite la parallèle m'_2m' à $a'b'$, il est évident que le triangle $\mu'm'm'_2$ ainsi obtenu est le triangle de rabattement du point

M ; par suite, m' est la projection verticale de ce point et $m'm'_2$ mesure la distance de sa projection horizontale à celle de la charnière ; cette projection horizontale est donc le point m obtenu en portant sur la ligne de rappel du point m' une longueur $\mu_1 m$ égale à $m'm'_2$, au-dessus ou au-dessous de ab suivant le sens adopté pour le rabattement du plan P.

Nous avons, en outre, déterminé dans l'épure le relèvement d'un deuxième point N du plan rabattu en n'_1, en utilisant le relèvement du point (m, m').

La droite MN, après le rabattement, est projetée en $m'_1 n'_1$; elle rencontre la charnière au point dont la projection verticale est α' et dont la projection horizontale s'obtient en rappelant α' en α sur ab ; comme ce point (α, α') ne bouge pas dans le mouvement de rotation du plan P, il en résulte que les deux projections de la droite MN sont $m\alpha$ et $m'\alpha'$. La projection verticale n' du point N rabattu en n'_1 se trouve alors à l'intersection de $m'\alpha'$ avec la perpendiculaire $n'_1 v'$ à $a'b'$; quant à sa projection horizontale, on l'obtient en rappelant n' en n sur $m\alpha$.

9. **Problème.** — *Relever un plan de bout rabattu sur le plan vertical de projection.*

Soit le plan de bout PαQ (*fig.* 4) supposé rabattu sur le plan vertical de projection.

Proposons-nous de déterminer les projections du point M de ce plan supposé rabattu en m'_1. En vertu de la règle énoncée au n° 5, la projection verticale de ce point est le pied m' de la perpendiculaire abaissée de m'_1 sur la trace verticale αQ du plan. D'autre part, en vertu de la même règle, la distance $m'_1 m'$ mesure l'éloignement du point cherché ; donc la projection horizontale de ce point est le point m obtenu en portant sur la ligne de rappel du point m' la longueur μm égale à $m'_1 m'$ au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre, suivant le signe de l'éloignement du point M, signe que l'on doit connaître *a priori*.

EXERCICES

1. Rabattre sur le plan vertical un plan P déterminé par un point (m, m') et une droite de profil définie par deux points (a, a') et (b, b') ; trouver le rabattement du point (m, m').

2. Construire les traces d'un plan défini par les projections (o, o') d'un de ses points et le rabattement o'_1 de ce point sur le plan vertical.

3. On donne les projections verticales $o'a'$ et $o'b'$ de deux droites concourantes OA et OB et l'éloignement du point A. Construire les projections horizontales de ces deux droites sachant que lorsqu'on rabat leur plan sur le plan de front passant par A, leur point de concours O est rabattu en un point donné o'_1.

4. On donne les deux angles α et β que font avec la ligne de terre les traces d'un plan. Trouver la relation qui doit exister entre les lignes trigonométriques de ces angles pour que, dans le rabattement du plan sur le plan vertical de projection, le rabattement de la trace horizontale du plan se confonde avec cette trace elle-même ou avec son prolongement.

5. On donne une droite dans le plan vertical; mener par elle un plan de manière que les traces verticale et horizontale du plan forment un angle de grandeur donnée. Cas où l'angle est droit.

6. On donne la trace verticale d'un plan et sur elle deux points (a, a') et (b, b').

Déterminer la trace horizontale du plan sachant que les distances des points (a, a') et (b, b') à cette trace ont : 1° soit une somme donnée; 2° soit une différence donnée.

CHAPITRE II

CHANGEMENT DU PLAN HORIZONTAL

§ I.

Théorie du changement de plan horizontal.

10. La théorie du changement de plan vertical a déjà été faite (I, 234 et suivants) et les applications traitées (I, 241 et suivants) en ont démontré l'intérêt.

On peut aussi changer le plan horizontal de projection. Le plan de projection qui le remplace est toujours perpendiculaire au plan vertical, mais en général il n'est plus perpendiculaire à la direction des verticales du premier système ; on l'appelle cependant le nouveau plan *horizontal* de projection.

11. Le *problème général* qui se pose dans le changement de plan horizontal est le suivant :

Connaissant les projections d'une figure F *sur deux plans de projection* H *et* V, *trouver les nouvelles projections de cette figure, lorsqu'on a remplacé le plan horizontal* H *par un autre plan de projection* H_1 *perpendiculaire à* V.

La solution de ce problème repose sur les deux remarques suivantes :

1° Comme le plan vertical de projection V ne change pas, les projections verticales des points de la figure F ne changent pas.

2° Pour la même raison, les éloignements de ces points, c'est-à-dire leur distance respective au plan vertical V, sont invariables.

Mais, après un changement du plan horizontal, les lignes de rappel n'ont plus dans l'épure la même direction et les nouvelles cotes sont, en général, différentes des anciennes.

12. Problème I. — *Effectuer le changement de plan pour un point donné* A (*fig.* 7 et 8).

Soit H_1 le nouveau plan de projection perpendiculaire à V ; il est défini dans l'épure (*fig.* 8) par sa trace verticale x_1y_1, qui est la nouvelle ligne de terre.

Soient a et a' les projections du point A sur les plans de projection H et V dont l'intersection xy est la ligne de terre primitive.

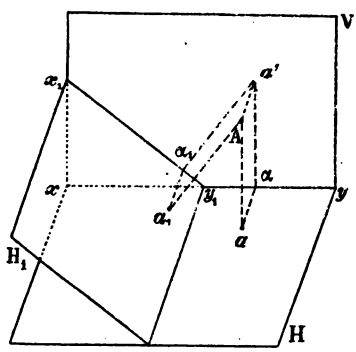


Fig. 7

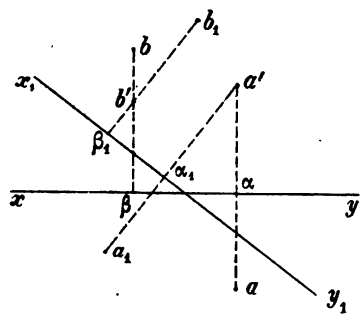


Fig. 8

Le point a' reste la projection verticale du point A (II, 1°). Les éloignements n'étant pas altérés par un changement de plan horizontal (II, 2°), la nouvelle projection horizontale du point A est le point a_1 obtenu en portant sur la nouvelle ligne de rappel $a'\alpha_1$, perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre x_1y_1, la distance α_1a_1 égale à la longueur αa qui mesurait primitivement l'éloignement de A.

13. Remarque I. — On peut placer arbitrairement d'un côté ou de l'autre de x_1y_1 la nouvelle projection horizontale du point A, car le rabattement du plan vertical V sur le plan H_1 peut s'effectuer à volonté dans les deux sens. Mais, si l'on a besoin d'effectuer le changement de plan pour d'autres points, il faut avoir bien soin de ne figurer d'un même côté de x_1y_1 que les projections horizontales des points dont les éloignements ont le même signe, tandis qu'on doit placer de part et d'autre de x_1y_1 les projections horizontales des points dont les éloignements sont de signes contraires.

Ainsi l'éloignement du point (b, b') est évidemment de signe contraire à celui du point (a, a'), parce que les anciennes projections

horizontales a et b de ces deux points sont de part et d'autre de xy ; donc leurs nouvelles projections horizontales a_1 et b_1 devront être de part et d'autre de x_1y_1.

14. Remarque II. — Si l'on se donne les projections a_1 et a' d'un point A dans le système x_1y_1 (c'est là une manière abrégée de désigner le système des plans de projection H_1 et V), on passe à ses projections a et a' dans le système xy par une construction identique à la précédente.

15. Problème II. — *Effectuer le changement de plan horizontal pour une droite définie par ses deux projections.*

Il suffit de faire le changement de plan pour deux points quelconques de la droite.

Dans la figure 9, représentant l'épure de la droite $(av, a'v')$, le changement de plan a été fait :

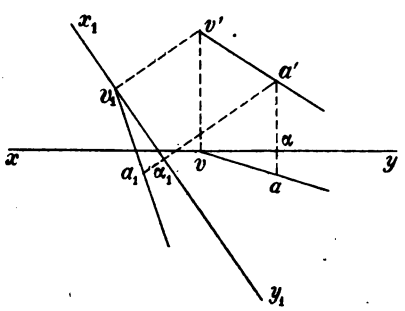


Fig. 9

1° pour la trace verticale (v, v') dont l'éloignement est nul et dont la nouvelle projection horizontale est par suite le point v_1 où la nouvelle ligne de rappel du point v' rencontre x_1y_1 ;

2° pour un point quelconque (a, a') dont la nouvelle projection horizontale est le point a_1, obtenu comme il a été dit au n° 12, en prenant $\alpha_1 a_1 = \alpha a$ sur la nouvelle ligne de rappel.

La nouvelle projection horizontale de la droite est la droite a_1v_1.

16. Problème III. — *Effectuer le changement de plan horizontal pour un plan.*

Il suffit de faire le changement de plan soit pour trois points du plan non en ligne droite, soit pour deux droites du plan.

Dans le cas où le plan donné est défini par ses traces $P\alpha Q$ dans le système primitif (*fig.* 10), on remarque que la trace verticale est

commune aux deux systèmes, puisque le plan vertical reste le même. Les projections de cette trace verticale sont (xy, αQ) dans le premier système, (x_1y_1, αQ) dans le nouveau.

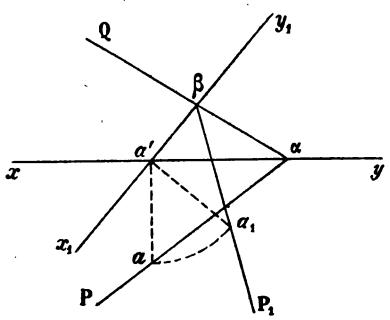


Fig. 10

Pour effectuer le changement de plan, il suffit donc de déterminer les projections, dans le nouveau système, d'un seul point du plan donné pris en dehors de la trace verticale.

On choisit de préférence le point (a, a') projeté verticalement au point de rencontre a' des deux lignes de terre. La nouvelle projection horizontale de ce point s'obtient en portant sur la perpendiculaire élevée en a' à x_1y_1 la longueur $a'a_1$ égale à $a'a$ (12). Puisque sa projection verticale a' est sur les deux lignes de terre, ce point appartient à la fois aux traces horizontales des deux plans dans les deux systèmes de projections; donc la nouvelle trace horizontale βP_1 de ce plan s'obtient en joignant le point a_1 au point β où la trace verticale αQ rencontre x_1y_1.

17. Remarque. — La construction précédente permet d'obtenir très simplement la trace horizontale du plan donné dans le système x_1y_1; mais dans bien des cas elle n'est pas applicable, parce que l'un ou l'autre des points β, a ou a', est en dehors des limites de l'épure. On détermine alors la nouvelle trace horizontale du plan, c'est-à-dire la droite d'intersection avec le nouveau plan horizontal de projection, en cherchant directement les projections horizontales, dans le nouveau système, de deux points quelconques de cette droite.

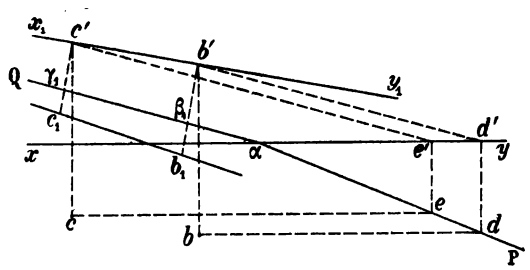


Fig. 11

Ainsi, pour déterminer la trace horizontale du plan PαQ dans le système de projections x_1y_1 (*fig.* 11), on se donne arbitrairement, sur x_1y_1 les projections verticales b' et c' de deux points de cette trace ; on cherche les projections horizontales b et c de ces points, dans le système xy, en utilisant les frontales du plan (bd, $b'd'$), (ce, $c'e'$) passant par ces points. On en déduit ensuite, comme nous l'avons montré au n° 12, les nouvelles projections horizontales b_1 et c_1 : la droite b_1c_1 est la trace horizontale du plan donné dans le nouveau système de projections.

18. Si l'on veut faire un changement de plan horizontal pour une figure quelconque, il suffit de chercher les nouvelles projections horizontales des points qui définissent cette figure. Ainsi, pour un polygone ou un polyèdre, on fera le changement de plan pour tous les sommets.

§ II.

Quelques applications du changement de plan horizontal.

19. **Problème I.** — *Faire un changement de plan horizontal de manière à amener une droite donnée* (ab, $a'b'$) (*fig.* 12) *à être horizontale dans le nouveau système.*

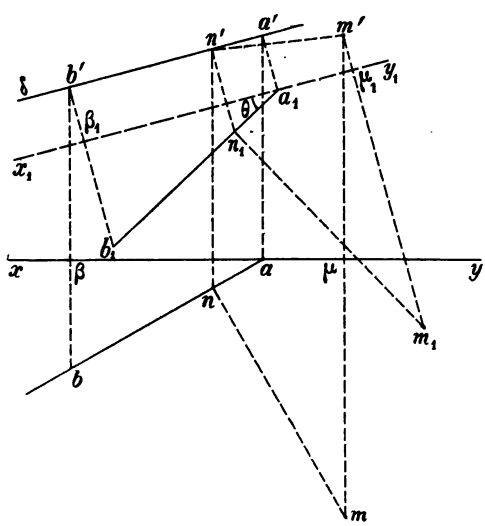


Fig. 12

Pour qu'une droite soit horizontale, il faut et il suffit que sa projection verticale soit parallèle à la ligne de terre. On obtient donc un système de projections dans lequel la droite donnée est horizontale en prenant la nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à $a'b'$. Pour obtenir la nouvelle projection horizontale de la

droite, on fait ensuite le changement de plan pour deux quelconques de ses points.

Dans l'épure (*fig.* 12), nous avons fait le changement de plan pour la trace verticale (a, a') de la droite et pour le point (b, b') ; les projections de la droite, dans le système x_1y_1, sont a_1b_1 et $a'b'$.

20. Conséquences. — I. On sait (I, 232, Rem.) que l'angle d'une droite horizontale avec le plan vertical est égal à l'angle aigu que sa projection horizontale forme avec la ligne de terre. Par conséquent, l'angle aigu $b_1a_1\beta_1$ formé par la nouvelle projection horizontale b_1a_1 avec la ligne de terre x_1y_1 mesure l'angle θ de la droite donnée avec le plan vertical.

21. II. — On sait que la distance de deux points d'une droite horizontale est égale à la distance de leurs projections horizontales (I, 5). Par suite, le changement de plan précédent détermine en a_1b_1 la distance des deux points (a_1, a') (b_1, b'), c'est-à-dire des deux points (a, a') et (b, b').

22. III. — On peut utiliser le changement qui vient d'être fait pour construire la perpendiculaire menée à la droite $(ab, a'b')$ par un point donné (m, m') (*fig.* 12). Pour cela, on détermine la nouvelle projection horizontale m_1 de ce point dans le système de projections x_1y_1 ; on est alors ramené à abaisser du point (m_1, m') la perpendiculaire sur l'horizontale $(a_1b_1, a'b')$. Or on sait (I, 173, Cas part.) que cette perpendiculaire se projette horizontalement suivant la perpendiculaire m_1n_1 abaissée de m_1 sur a_1b_1. On rappelle ensuite dans le système x_1y_1 le point n_1 en n' sur $a'b'$, puis dans le système xy n' en n sur ab : la droite $(mn, m'n')$ est la perpendiculaire demandée.

23. Problème II. — *Changer le plan horizontal de manière qu'un plan donné soit vertical dans le nouveau système.*

Pour qu'un plan soit vertical dans un système de deux plans de projection, il faut et il suffit (I, 129) que la direction de ses frontales soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Pour qu'un plan donné dans un système devienne vertical dans un autre système, il suffit donc de prendre la ligne de terre qui définit le nouveau système perpendiculaire aux frontales du plan.

24. Exemple. — *Le plan* PαQ (*fig.* 13) *est défini par ses deux traces.*

Pour que le plan devienne vertical, il suffit, d'après ce que nous venons de dire, de prendre une ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la trace verticale αQ. Comme tous les points d'un plan vertical se projettent horizontalement sur sa trace horizontale (I, 129, 4°), en déterminant la nouvelle projection horizontale a_1 *d'un seul* point (a, a') du plan $(\alpha_1 a_1 = aa')$, et en joignant a_1 au point β où αQ rencontre x_1y_1, on a immédiatement la nouvelle trace horizontale βP_1 du plan donné.

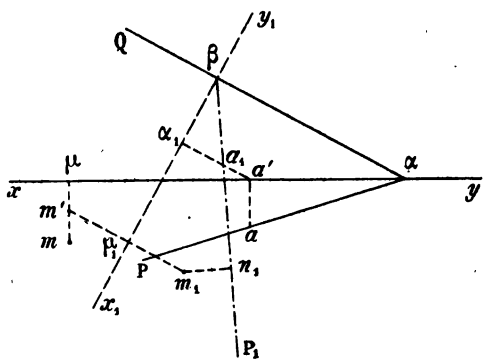


Fig. 13

25. Conséquences. — I. On sait (I, 222, 2°) que l'angle d'un plan vertical avec le plan vertical de projection est égal à l'angle aigu formé par sa trace horizontale avec la ligne de terre. L'angle $x_1\beta P_1$ (*fig.* 13) est donc l'angle du plan donné avec le plan vertical de projection.

26. II. — On a fait remarquer (I, 199, 2°) que la distance d'un point donné à un plan vertical est mesurée par la distance de la projection horizontale du point à la trace horizontale du plan.

Par suite, si on se donne un point (m, m') (*fig.* 13) et si on détermine sa nouvelle projection horizontale m_1, la distance de ce point au plan PαQ est égale à la distance m_1n_1 du point m_1 à la trace βP_1.

27. Changement des deux plans de projection. — Après avoir d'abord changé l'un des plans de projection, le plan vertical par exemple, on peut ensuite être amené à changer de plan horizontal.

Dans ce cas, il suffit de se donner dans le deuxième système de projections x_1y_1 la ligne de terre x_2y_2 qui sert à définir le nouveau plan horizontal ; puis, pour obtenir les dernières projections, on effectue les constructions indiquées dans ce chapitre ou dans un chapitre précédent (I, 234 et suivants).

Nous nous bornerons à cette indication et nous renverrons le lecteur désireux de faire des applications aux exercices 7 et 8 de la fin de ce chapitre.

28. Dans la pratique du dessin, on change fréquemment *un seul* des plans de projection. Par exemple, dans la représentation d'un édifice ou d'une machine, pour figurer des détails importants, on projette le détail à représenter sur des plans verticaux non parallèles au premier plan vertical choisi ; les projections ainsi obtenues s'appellent *coupes* ou *profils* et la première projection verticale porte le nom d'*élévation*. Dans la représentation d'un édifice, l'élévation est la projection sur un plan vertical parallèle à la façade et les profils sont les projections de sections par des plans verticaux perpendiculaires à la façade.

Pratiquement le double changement de plan est plus rarement employé.

EXERCICES

1. Trouver, par un changement de plan horizontal, l'angle de deux plans dont les traces verticales sont parallèles et construire les plans bissecteurs de leurs dièdres (on rend les deux plans verticaux).

2. On donne par leurs projections trois points quelconques. Changer de plan horizontal de façon que les nouvelles projections horizontales des trois points soient en ligne droite.

3. On donne deux droites : changer de plan horizontal de manière que leurs nouvelles projections horizontales soient parallèles.

4. On donne une droite par ses deux projections. Changer de plan horizontal de façon que dans le nouveau système la droite soit parallèle à l'un des plans bissecteurs ou située dans l'un de ces plans.

5. Par un changement de plan horizontal, amener dans le nouveau système de projections :

1° une droite donnée dans le premier système à être de profil dans le second ;

2° un plan quelconque dans le premier système à être parallèle à la ligne de terre dans le second.

6. On donne un plan par ses traces. Changer de plan horizontal de façon que les nouvelles traces du plan soient confondues sur l'épure.

7. Par deux changements de plan successifs amener dans le dernier système de projections :

1° une droite quelconque du premier système à être verticale (on commence par la rendre de front dans un système intermédiaire);

2° une droite quelconque du premier système à être parallèle à la ligne de terre;

3° un plan à être horizontal (on commence par le rendre de bout dans un système intermédiaire) ;

4° un plan à être de profil;

5° deux droites à être simultanément horizontales;

6° deux plans à être simultanément verticaux [on rend leur intersection verticale (1°)].

8. On définit un tétraèdre par les projections de ses quatre sommets ; par deux changements de plan successifs, amener sa nouvelle projection horizontale à être un parallélogramme.

CHAPITRE III

ROTATION AUTOUR D'UN AXE PERPENDICULAIRE A UN PLAN DE PROJECTION

§ I.

29. Rappelons des résultats vus en géométrie (GRÉVY, *Géométrie dans l'espace*, nos 428 et suivants).

On appelle *mouvement de rotation* dans l'espace un déplacement d'une figure dans lequel tous les points d'une droite D restent fixes. Cette droite est dite *l'axe* de la rotation. Dans ce déplacement tout point M de la figure (*fig.* 14) qui n'est pas sur l'axe décrit une circonférence (C) dont le plan P est perpendiculaire à l'axe, dont le centre O est sur l'axe et dont le rayon MO est, par suite, la distance du point M à l'axe. Si le déplacement amène M en M_1, l'angle MOM_1 est *l'angle* de la rotation.

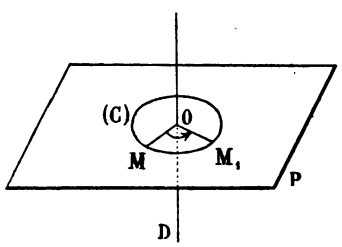


Fig. 14

Pour une rotation déterminée d'une figure, cet angle est le même pour tous les points de la figure.

Pour définir une rotation, il suffit de connaître : 1° son axe ; 2° son angle en grandeur et en sens.

30. Nous allons faire l'épure d'une rotation pour des figures simples, mais seulement dans le cas où *l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection* H *ou* V. Dans cette hypothèse le plan P (*fig.* 14) est parallèle au plan H ou V ; par suite la circonférence (C) décrite par le point M de la figure et l'angle de rotation MOM_1 se projettent en vraie grandeur sur le plan H ou V ; l'épure du déplacement est donc facile à tracer.

31. **Problème.** — *Faire tourner un point donné* (a, a') (*fig.* 15) *d'un angle donné* α *autour de la verticale* v.

La circonférence que décrit le point (a, a') se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe mené par ce point, c'est-à-dire dans le plan horizontal H' du point (a, a'). Son centre est le point (o, o') commun à l'axe et à ce plan. Cette circonférence se projette horizontalement en vraie grandeur ; sa projection est définie par son centre o et un de ses points a ; on peut, par suite, la tracer et, comme l'angle de rotation se projette en vraie grandeur, en portant dans le sens convenu un angle aoa_1 égal à l'angle donné α, on obtient en a_1 la projection horizontale du point A_1 où est venu le point A après la rotation. Comme le point s'est déplacé dans le plan horizontal H', en rappelant a_1 en a'_1 sur H', on obtient la projection verticale du point A_1, qui est défini sur l'épure par ses projections a_1 et a'_1.

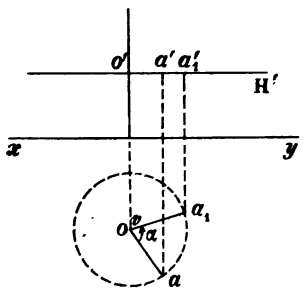


Fig. 15

32. Remarque. — Dans le cas où l'axe de rotation est la droite de bout d' (*fig.* 16), on a une construction analogue en échangeant les rôles des projections. Le point (a, a') décrit dans le plan de front F une circonférence projetée verticalement en vraie grandeur suivant la circonférence de centre d' et de rayon $d'a'$; l'angle de rotation se trouve projeté verticalement en vraie grandeur en $\widehat{a'd'a'_1}$; d'où l'on déduit la projection horizontale a_1 ; le point

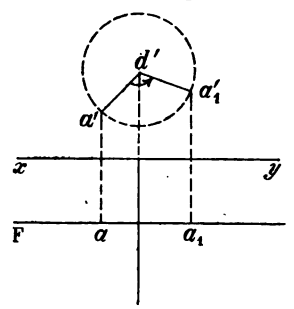


Fig. 16

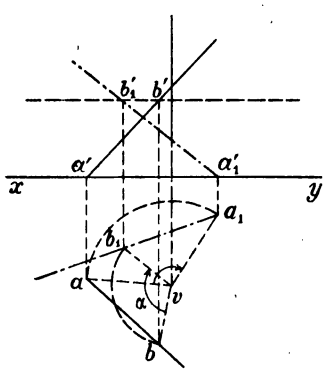


Fig. 17

(a_1, a'_1) est la nouvelle position du point (a, a') après la rotation.

33. **Problème.** — *Faire tourner une droite* $(ab, a'b')$ *d'un angle donné* α *autour de la verticale* v (*fig.* 17).

Méthode. — Pour définir la nouvelle position de la droite, il suffit de définir les nouvelles positions de deux de ses points.

Dans l'épure de la figure 17, on a effectué les constructions indiquées au n° 31, qui donnent en (a_1, a'_1) et (b_1, b'_1) les nouvelles positions des points (a, a') et (b, b'). La nouvelle position de la droite $(ab, a'b')$ est $(a_1b_1, a'_1b'_1)$.

34. Remarque I. — Si la droite a un point commun avec l'axe de rotation, ce point reste fixe pendant le déplacement et pour définir la nouvelle position de la droite, il suffit d'en faire tourner *un seul* autre point.

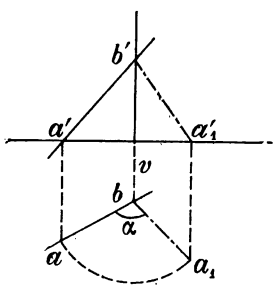


Fig. 18

C'est le cas de la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 18) qui rencontre la verticale v au point (b, b'). La rotation amène le point (a, a') en (a_1, a'_1) (31) et la nouvelle position de la droite est $(a_1b, a'_1 b')$.

35. Remarque II. — Lorsque la droite de l'espace tourne autour de l'axe vertical, le déplacement que subit sa projection horizontale dans le plan de l'épure est une *rotation* qui a pour *centre* le pied v de l'axe et dont l'angle est égal à celui de la rotation dans l'espace. Ceci résulte de ce que la projection horizontale a d'un point quelconque de la droite (*fig.* 18) tourne de l'angle α autour du point v, pied de l'axe.

En conséquence pour faire tourner la projection horizontale de la droite, il suffit, d'après des constructions connues de géométrie plane, d'abaisser du point v la perpendiculaire vh sur la projection ab de la droite (*fig.* 19), de faire tourner le point h de l'angle α autour du point v, ce qui l'amène en h_1 et de mener en h_1 la perpendiculaire h_1b_1 à la droite vh_1; la droite b_1h_1 est la nouvelle projection horizontale de la droite.

Le point projeté horizontalement en h_1 se projette verticalement en h'_1, sur la parallèle à xy menée par le point h' (31).

Pour faire tourner un second point de la droite, sa trace horizontale (a, a') par exemple, on remarque que la nouvelle projection horizontale a_1 de ce point doit se trouver : 1° sur la droite b_1h_1, nou-

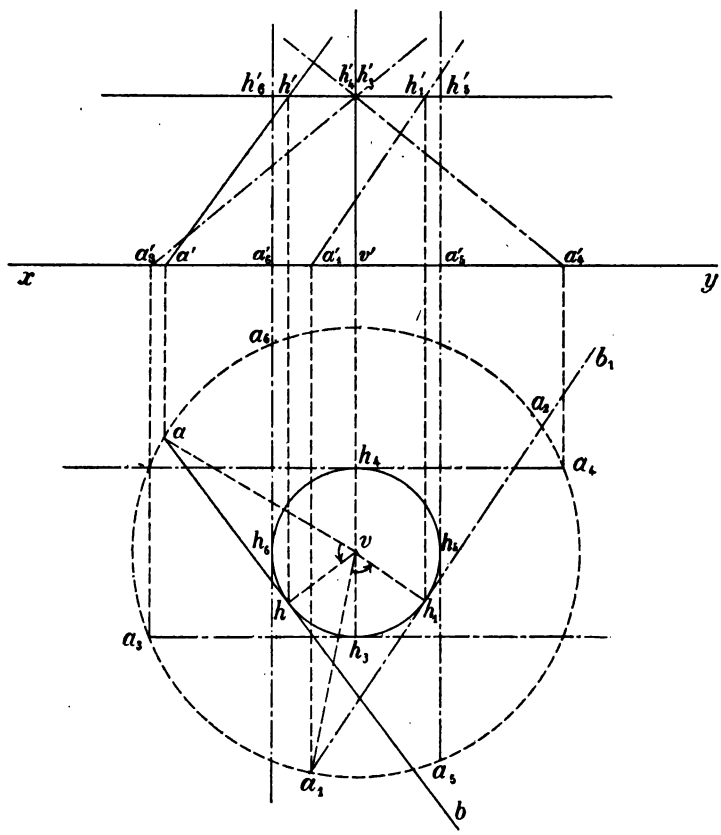


Fig. 19

velle projection horizontale de la droite ; 2° sur la circonférence de centre v et de rayon va (31). On obtient, d'après cette remarque, deux points a_1 et a_2 à l'intersection de la circonférence et de la droite b_1h_1 ; mais le point a_1 convient seul, car dans la rotation l'angle avh conserve son sens, ce qui fait rejeter le point a_2 qui donne un angle a_2vh_1 de sens contraire à $\widehat{avh}$, tandis que l'angle a_1vh_1 a même sens que $\widehat{avh}$.

Le point a_1 se rappelle sur la ligne de terre en a'_1 et on a la nouvelle position de la droite en $(a_1h_1, a'_1h'_1)$.

36. Puisque la projection horizontale tourne autour du point v, elle reste constamment tangente au cercle de centre v qui a pour rayon la distance vh du point v à la droite ab. Par suite, elle devient deux fois parallèle à une direction quelconque du plan horizontal.

En particulier, elle peut être rendue :

1° soit parallèle à la ligne de terre en a_4h_4 et a_3h_3 ; la droite dans l'espace est alors *de front* en $(a_4h_4, a'_4h'_4)$ et $(a_3h_3, a'_3h'_3)$;

2° soit perpendiculaire à la ligne de terre en a_5h_5 et a_6h_6 ; la droite de l'espace est alors *de profil* en $(a_5h_5, a'_5h'_5)$ et $(a_6h_6, a'_6h'_6)$.

On a, de cette façon, résolu les problèmes suivants : *Faire tourner une droite autour d'une verticale jusqu'à ce qu'elle soit devenue* : 1° *soit de front*, 2° *soit de profil.*

37. En faisant de même tourner une droite autour d'un axe de bout, on peut l'amener à être soit horizontale, soit de profil.

Si dans ces problèmes le choix de l'axe de rotation reste arbitraire, on a intérêt à prendre un axe qui rencontre la droite de façon qu'un point de la droite reste fixe dans la rotation, ce qui simplifie les constructions (34).

38. Remarque III. — En *géométrie cotée*, où l'on se borne à la considération de la projection horizontale, on détermine d'abord la projection de la droite par la construction précédente (36) en supposant l'axe de rotation vertical.

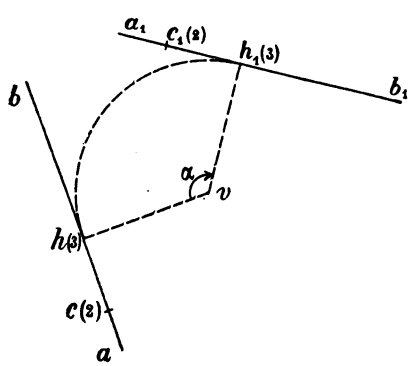


Fig. 20

La rotation de l'angle α autour du point v amène la projection ab en a_1b_1. Dans cette rotation le point $h(3)$ reste à la même cote (31) et vient en $h_1(3)$ (*fig.* 20).

La remarque suivante permet d'obtenir simplement un second point de la nouvelle droite :

Dans la rotation, l'angle de la droite et de la verticale ne change pas ; par suite l'angle de la droite et du plan horizontal qui est le complément du précédent reste aussi invariable, or sa cotangente est l'intervalle de la droite (I, 22) ; l'intervalle de la droite ne change donc pas pendant la rotation autour d'un axe vertical. Par suite, en portant sur a_1b_1, à partir du point h_1, la longueur h_1c_1 égale à l'intervalle hc de la droite et en l'orientant sur la tangente a_1b_1 dans le même sens que l'est hc sur la tangente ab, on obtient en c_1 la projection du point de la nouvelle droite qui a pour cote 2.

39. **Problème.** — *Faire tourner un plan donné autour d'une verticale donnée.*

Méthode. — Pour faire tourner un plan, il suffit de faire tourner soit trois points non en ligne droite, soit deux droites concourantes ou parallèles situées dans ce plan.

L'axe de rotation perce en général le plan en un point qui reste fixe dans la rotation et qu'on utilise en premier lieu.

40. **Exemple.** — *Soit à faire tourner d'un angle donné autour de la verticale v un plan défini par ses traces* PαQ (*fig.* 21).

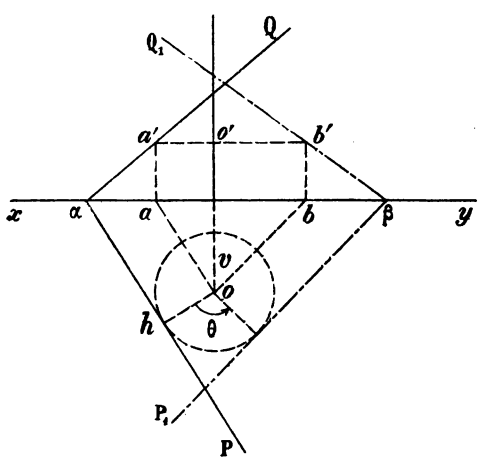


Fig. 21

On cherche d'abord le point (o, o') commun à l'axe et au plan, à l'aide de l'horizontale (oa, o'a') du plan donné.

Ce point reste fixe dans la rotation.

On fait ensuite tourner la trace horizontale (αP, xy) ; une rotation de l'angle donné θ autour du point v amène αP en $P_1\beta$ (35).

Le plan dans sa nouvelle position est défini par sa trace horizontale βP_1 et le point (o, o'). Si l'on veut construire sa trace verticale, il

suffit de mener l'horizontale (ob, $o'b'$) du point (o, o') et de déterminer sa trace verticale (b, b'); on obtient la trace verticale βQ_1 du plan en traçant la droite $b'\beta$.

41. Remarque I. — Dans la rotation, la trace horizontale αP du plan reste tangente à la circonférence de centre v et de rayon vh (*fig.* 21). Elle peut donc être rendue deux fois parallèle à une direction quelconque du plan horizontal.

1° En particulier, on peut l'amener à être perpendiculaire à la ligne de terre en γP_2 ou δP_3 (*fig.* 22); dans la position correspondante le plan est de bout (I, 130, 2°) et comme sa trace verticale passe par o' (I, 130, 4°), on l'obtient immédiatement soit en $\gamma o'$, soit en $\delta o'$.

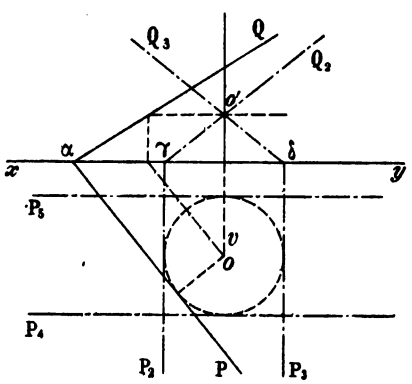


Fig. 22

2° La trace horizontale peut être rendue parallèle à la ligne de terre en P_4 ou P_5. Le plan est alors parallèle lui-même à la ligne de terre. Il est défini par sa trace horizontale et le point (o, o').

On a de cette façon résolu les problèmes suivants : *Faire tourner un plan autour d'une verticale jusqu'à ce qu'il devienne* : 1° *soit de bout*; 2° *soit parallèle à la ligne de terre.*

Remarque II. — En faisant tourner le plan autour d'un axe de bout, on peut, d'une manière analogue, l'amener à être soit vertical, soit parallèle à la ligne de terre.

42. Remarque III. — Lorsqu'un plan tourne autour d'une verticale :

1° Les horizontales restent horizontales pendant la rotation, par suite les lignes de plus grande pente relatives au plan horizontal restent constamment lignes de plus grande pente;

2° Son angle avec la verticale reste invariable, par suite son angle

avec le plan horizontal, qui est le complément du précédent, est constant ; il en est de même de la tangente de cet angle, qui est la pente du plan, et de sa cotangente qui est l'intervalle du plan.

43. On peut utiliser ces deux propriétés, en géométrie cotée, pour faire tourner un plan autour d'une verticale. Soit, par exemple, à faire tourner de 60° autour de la verticale v un plan défini par son échelle de pente P (*fig.* 23).

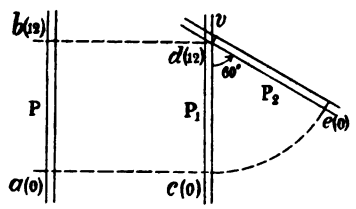


Fig. 23

Considérons l'échelle de pente $c(0)$ $d(12)$ dont la projection P_1 passe par le pied v de la verticale.

Faisons-la tourner de 60° autour de la verticale v ; le point $d(12)$ situé sur l'axe ne bouge pas, le point $c(0)$ vient en $e(0)$ (31) et d'après la propriété signalée (42, 1°) la droite $d(12)$ $e(0)$ est une échelle de pente du plan dans sa nouvelle position P_2.

44. **Problème.** — *Faire tourner une figure quelconque autour d'une verticale ou d'une droite de bout.*

Méthode. — Il faut construire les nouvelles projections d'un nombre de points suffisant pour définir la figure dans sa nouvelle position.

Par exemple, si la figure est un polygone ou un polyèdre, il suffit de faire tourner tous ses sommets.

45. Nous nous sommes bornés à considérer les rotations dont l'axe est perpendiculaire à l'un des plans de projection. Nous ferons remarquer que le rabattement d'un plan sur un plan horizontal (I, 175) ou de front (1) est une rotation de ce plan autour d'un axe parallèle à un plan de projection dont l'angle est l'angle du plan donné avec le plan sur lequel on le rabat. En outre, dans le rabattement on se borne à faire tourner les points situés dans le plan considéré.

EXERCICES

1. Faire tourner un point donné : 1° autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il ait un éloignement donné; 2° autour d'un axe de bout jusqu'à ce qu'il ait une cote donnée.

2. Faire tourner un point donné autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il soit à une distance donnée d'une horizontale donnée. (*Navale.*)

3. Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'elle soit parallèle à un plan donné.

4. Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical jusqu'à ce que sa projection verticale ait une direction donnée.

5. Faire tourner une droite autour d'un axe de bout jusqu'à ce que ses deux projections soient parallèles.

6. Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'elle rencontre : 1° une verticale donnée ; 2° une droite de bout donnée.

7. Faire tourner une droite donnée autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce que ses deux projections soient perpendiculaires.

8. On donne un segment MN dans le plan horizontal, un axe vertical u et un point (a, a'). Faire tourner MN autour de l'axe jusqu'à ce que les extrémités du segment soient équidistantes du point (a, a'). (*Baccalauréat.*)

9. Par la trace horizontale d'une droite de front donnée, mener une seconde droite faisant avec celle-ci un angle donné, telle en outre que le segment intercepté sur elle par les deux plans de projection ait une longueur donnée. (*Baccalauréat.*)

10. 1° Faire tourner un plan donné autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il passe par un point donné ; 2° faire tourner le point autour du même axe jusqu'à ce qu'il soit dans le plan ; 3° relation entre ces deux rotations. (*Saint-Cyr.*)

11. Faire tourner un plan donné autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle à une droite donnée.

12. Faire tourner un plan P autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il soit perpendiculaire à un autre plan Q. (*Navale.*)

13. Faire tourner un point donné autour d'une verticale jusqu'à ce que la perpendiculaire abaissée de ce point sur un plan donné rencontre une droite donnée. (*Navale*.)

14. Faire tourner autour d'un axe vertical donné un quadrilatère quelconque défini par les projections de ses quatre sommets jusqu'à ce que sa projection verticale soit un trapèze.

15. Par une rotation autour d'un axe vertical suivie d'une rotation autour d'un axe de bout, amener une droite quelconque à être : 1° soit parallèle à la ligne de terre ; 2° soit verticale. (On commence par la rendre de front.)

16. Par une rotation autour d'un axe vertical suivie d'une rotation autour d'un axe de bout, amener un plan à être : 1° soit horizontal ; 2° soit de profil. (On commence par le rendre de bout.)

17. Par deux rotations successives, amener deux plans invariablement liés à être verticaux simultanément. (Par une première rotation d'axe vertical, on amène d'abord l'intersection des deux plans à être de front, puis par une rotation d'axe horizontal, on la rend verticale.)

18. (Géométrie cotée). — Si deux droites ont leurs intervalles égaux, on peut amener l'une à coïncider avec l'autre par une rotation autour d'un axe vertical. Cas d'exception. Déterminer l'axe de cette rotation. (*Saint-Cyr*.)

19. On donne deux plans et un axe vertical ; faire tourner les plans d'un même angle autour de l'axe de façon que les nouvelles traces verticales soient rectangulaires.

20. Faire tourner un plan donné autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il soit à une distance donnée d'un point donné.

21. Faire tourner un plan autour d'une verticale jusqu'à ce que ses deux traces soient : 1° également inclinées sur la ligne de terre ; 2° ou bien dans le prolongement l'une de l'autre. (On utilisera les propositions signalées au Tome I, nos 341 et 342.)

CHAPITRE IV

APPLICATION DU CHANGEMENT D'UN PLAN DE PROJECTION ET DES ROTATIONS

DÉTERMINATION DES DISTANCES

46. Nous avons déjà montré comment on pouvait déterminer les distances à l'aide d'un rabattement (I, 192 et suivants). Nous allons reprendre ces questions en utilisant soit un changement de plan, soit une rotation.

§ I.

Distance de deux points.

47. Méthode générale. — Pour déterminer la distance de deux points, *on amène la droite des deux points à être parallèle à un plan de projection ; leur distance se projette alors sur ce plan en vraie grandeur.*

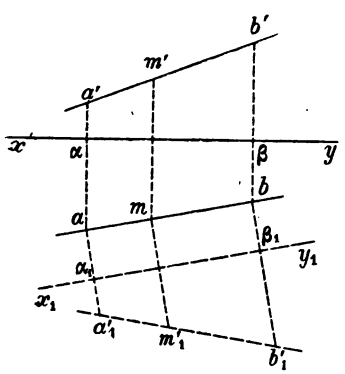


Fig. 24

48. Problème I. — *Soit à déterminer la distance des deux points (a, a') et (b, b') (fig. 24).*

I. Méthode du changement de plan. — On fait un changement de plan vertical de manière à rendre la droite de front (I, 241) ou un changement de plan horizontal de manière à la rendre horizontale (19).

Dans l'épure de la figure 24, on a changé de plan vertical en prenant la nouvelle ligne de terre x_1y_1 parallèle à la projection ab. On a déterminé les nouvelles projections a'_1 et b'_1 des points donnés en portant sur les nouvelles lignes de rappel à partir de x_1y_1 les longueurs $\alpha_1a'_1 = \alpha a'$ et $\beta_1b'_1 = \beta b'$.

Comme la droite est de front dans le nouveau système, la distance des deux points est égale à la distance $a'_1b'_1$ de leurs projections verticales.

49. Remarque. — On aurait pu prendre pour nouvelle ligne de terre x_1y_1 la projection horizontale ab ; la construction à effectuer (*fig.* 25) ne diffère alors en rien de celle à laquelle donne lieu le rabattement du plan projetant la droite sur le plan horizontal de projection (I, 195). Il ne faut d'ailleurs pas oublier que la projection verticale dans une épure est obtenue par le rabattement du plan vertical de projection sur le plan horizontal (I, 82).

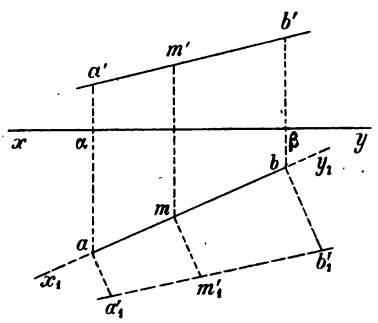


Fig. 25

Les deux méthodes (rabattement ou changement de plan) ne sont donc pas distinctes dans ce cas.

50. II. Méthode des rotations. — *Soit à déterminer la distance des deux points* (a, a') *et* (b, b') (*fig.* 26).

Par une rotation autour de la verticale du point (a, a') on amène la droite à être de front (36).

Cette rotation laisse immobile le point (a, a') qui appartient à l'axe ; elle amène le point (b, b') dans la position (b_1, b'_1) (31).

La distance des deux points est égale à la distance $a'\,b'_1$ de leurs projections verticales.

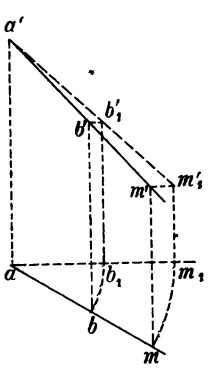


Fig. 26

Remarque. — On aurait pu, d'une manière analogue, amener la

droite à être horizontale par une rotation autour de la droite de bout du point (a, a'). Après la rotation, la distance cherchée se projetterait alors en vraie grandeur sur le plan horizontal

51. Problème inverse. — *Porter sur une droite donnée une longueur donnée à partir d'un point donné.*

On applique les deux méthodes précédentes en faisant les constructions inverses.

Soit à porter sur la droite $(ab, a'b')$ *et à partir du point* (a, a') *une longueur donnée* δ.

I. Méthode du changement de plan. — Changeons de plan vertical de manière à rendre la droite de front dans le nouveau système $(ab, a'_1b'_1)$ (*fig.* 24 et 25). Portons alors sur $a'_1b'_1$ et à partir de a'_1 la longueur $a'_1m'_1$ égale à δ, puis rappelons en (m, m') le point m'_1 ; la longueur demandée est projetée en $(am, a'm')$.

II. Méthode des rotations. — Faisons tourner la droite $(ab, a'b')$ autour de la verticale du point (a, a') jusqu'à ce qu'elle soit devenue de front en $(ab, a'b'_1)$ (*fig.* 26). Portons sur la droite $a'b'_1$ et à partir de a' la longueur $a'm'_1$ égale à δ ; puis par une rotation inverse de celle qui a été faite, ramenons la droite dans sa position primitive ; le point projeté en m'_1 vient en (m, m') obtenu en menant la droite m'_1m' perpendiculaire à aa' jusqu'à son point de rencontre m' avec $a'b'$, puis la ligne de rappel $m'm$: la longueur demandée est projetée en $(am, a'm')$.

Remarque. — Pour construire le point (m, m') on peut aussi rappeler m'_1 en m_1 sur ab_1, puis déterminer le point m par l'intersection de la droite ab et de la circonférence de centre a et de rayon am_1 (31).

§ II.

Distance d'un point à un plan.

52. Méthode générale. — *Par un changement de plan ou une rotation, on rend le plan perpendiculaire à un plan de projection de ma-*

nière à être ramené à un cas particulier où la détermination de la distance est immédiate (I, 199, 2°).

53. I. Méthode du changement de plan. — La question a déjà été traitée comme application du changement de plan vertical (I, 248) et du changement de plan horizontal (26).

54. II. Méthode des rotations. — *Soit à déterminer la distance du point* (a, a') *au plan défini par les deux droites concourantes* $(ob, o'b')$ *et* $(oc, o'c')$ (*fig.* 27).

Faisons tourner le plan autour de la verticale du point (a, a') jusqu'à ce qu'il soit devenu de bout (41).

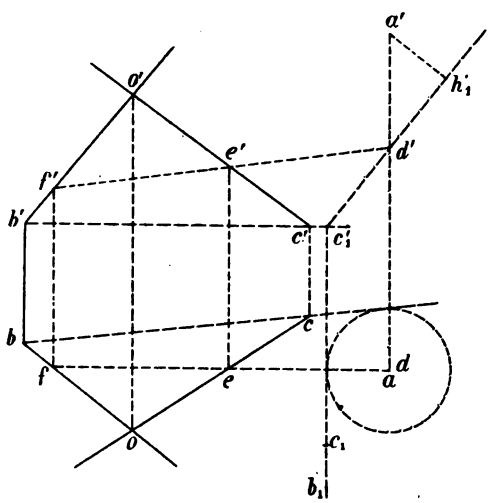


Fig. 27

Pour cela, déterminons d'abord le point d'intersection (d, d') de cette verticale avec le plan donné à l'aide de la frontale $(ef, e'f')$ (I, 112, 2°). Ce point (d, d') reste fixe pendant la rotation.

Faisons tourner l'horizontale $(bc, b'c')$ du plan donné ; sa projection horizontale reste tangente au cercle de centre a qui est tangent à la droite bc (36) ; nous arrêtons la rotation lorsque la projection horizontale de cette droite est venue en b_1c_1 parallèlement à la direction des lignes de rappel ; le plan est alors rendu de bout (41).

Le point (c, c') a pour nouvelle projection verticale c'_1 et la trace verticale du plan de bout est la droite $d'c'_1$ qui joint les projections verticales d' et c'_1 de deux de ses points (d, d') et (c_1, c'_1).

La distance du point (a, a') au plan est égale à la distance $a'h'_1$ de sa projection verticale a' à la trace c'_1d' (I, 199, 2°).

§ III.

Distance d'un point à une droite.

55. Méthode générale. — *Par deux changements de plans successifs ou par deux rotations successives, on amène la droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection, de manière à être ramené à un cas particulier où la détermination de la distance du point à la droite est immédiate* (I, 204).

56. **I. Méthode du changement de plan. — Cas particulier :** *La droite donnée est parallèle à l'un des plans de projection.*

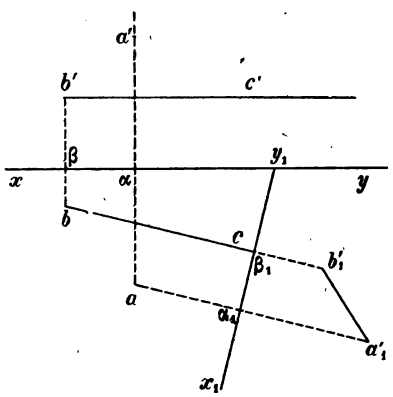


Fig. 28

Soit à déterminer la distance du point (a, a') *à l'horizontale* $(bc, b'c')$ (*fig.* 28).

On change de plan vertical de façon que la droite soit de bout dans le nouveau système ; comme la droite est horizontale, il suffit pour cela de prendre une ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la projection horizontale cb. Tous les points de la droite ont alors leurs projections verticales confondues en b'_1 à la distance $\beta_1 b'_1 = \beta b'$ de la nouvelle ligne de terre.

Le point (a, a') a sa nouvelle projection verticale en a'_1 $(\alpha_1 a'_1 = \alpha a')$ et la distance du point à la droite est la longueur $a'_1 b'_1$ (I, 204).

57. **Cas général.** — Pour trouver la distance d'un point à une *droite quelconque*, un seul changement de plan ne suffit plus ; il faut en exécuter deux successifs.

On peut, par exemple, procéder ainsi :

1° Par un changement de plan horizontal, on amène la droite à être horizontale dans le nouveau système (19).

2° On est alors ramené au cas particulier qui vient d'être traité (56) et on obtient la distance cherchée en changeant le plan vertical de projection.

Nous laissons au lecteur le soin de rassembler sur une même épure les constructions des figures 12 et 28.

58. II. Méthode des rotations. — Cas particulier : *La droite donnée est parallèle à l'un des plans de projection.*

Soit à déterminer la distance du point (a, a') *à la droite de front* $(bc, b'c')$ (*fig.* 29).

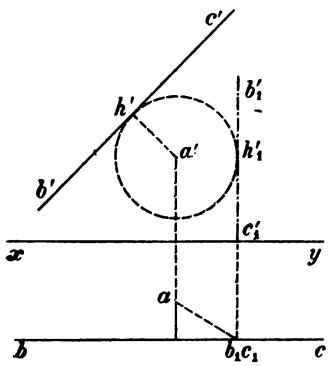


Fig. 29

Par une rotation autour de la droite de bout du point (a, a'), on amène la droite $(bc, b'c')$ à être verticale. En effet, dans cette rotation, la projection verticale de la droite reste tangente à la circonférence de centre a' et tangente à $b'c'$. En arrêtant la rotation lorsque la projection verticale de la droite est en $b'_1c'_1$ perpendiculaire à la ligne de terre, on obtient en b_1 et c_1 sur bc les projections horizontales des nouvelles positions des deux points (b, b') et (c, c') (32). La droite $(b_1c_1, b'_1c'_1)$ est verticale, et, comme le point (a, a') est resté fixe pendant la rotation, la distance du point à la droite est la longueur ab_1 (I, 204).

59. Cas général. — Pour trouver la distance d'un point à une *droite quelconque*, une seule rotation ne suffit plus ; il faut en effectuer deux successives. On peut, par exemple, procéder ainsi :

1° Par une rotation autour d'un axe vertical, on amène la droite à être de front (36).

2° On est alors ramené au cas particulier qui vient d'être traité (58) et on obtient la distance cherchée par une deuxième rotation autour d'un axe de bout.

Nous laissons au lecteur le soin de rassembler sur une même épure les constructions des figures 19 et 29.

§ IV.

Perpendiculaire commune à deux droites et plus courte distance.

60. **Problème.** — *Construire les projections de la perpendiculaire commune à deux droites données non situées dans un même plan et déterminer leur plus courte distance.*

Solution géométrique. — La perpendiculaire commune à deux droites de l'espace AB et CD est une droite rencontrant les deux premières à angle droit ; sa direction est donc celle d'une perpendiculaire à un plan parallèle aux deux droites données, ou encore celle de la droite d'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires à ces deux droites.

Lorsqu'on connaît la *direction* de la perpendiculaire commune, il ne reste plus qu'à trouver une droite parallèle à cette direction, rencontrant les deux droites données [Problème traité (I, 68 et 167)].

La plus courte distance des deux droites est la longueur du segment de la perpendiculaire commune compris entre les deux droites.

Remarque. — Si on cherche la plus courte distance des deux droites et non la perpendiculaire commune, il suffit de mener par l'une des droites AB un plan parallèle à l'autre CD ; la plus courte distance est la distance d'un point quelconque de la droite CD à ce plan.

61. **Solution graphique.** — **Exemple I.** — *Soit à construire la perpendiculaire commune aux deux droites* $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ (*fig.* 30).

Nous suivrons pas à pas la solution géométrique précédente ; nous déterminerons : 1° la direction de la perpendiculaire commune, 2° sa position.

1° *Direction de la perpendiculaire commune.* — Première méthode. — Par un point (o, o') pris sur $(ab, a'b')$ menons la parallèle $(oe, o'e')$ à $(cd, c'd')$; le plan déterminé par les droites $(ab, a'b')$ et $(oe, o'e')$ est mené par la première droite donnée parallèlement à la seconde. En construisant une horizontale $(fh, f'h')$ et une frontale $(fg, f'g')$ de ce

plan, et en menant op perpendiculaire à fh et $o'p'$ perpendiculaire à $f'g'$, on obtient une droite $(op, o'p')$ perpendiculaire au plan, qui définit par suite la direction de la perpendiculaire commune.

Deuxième méthode. — Par un point α pris sur xy, menons αP perpendiculaire à ab et αQ perpendiculaire à $a'b'$; le plan ayant pour

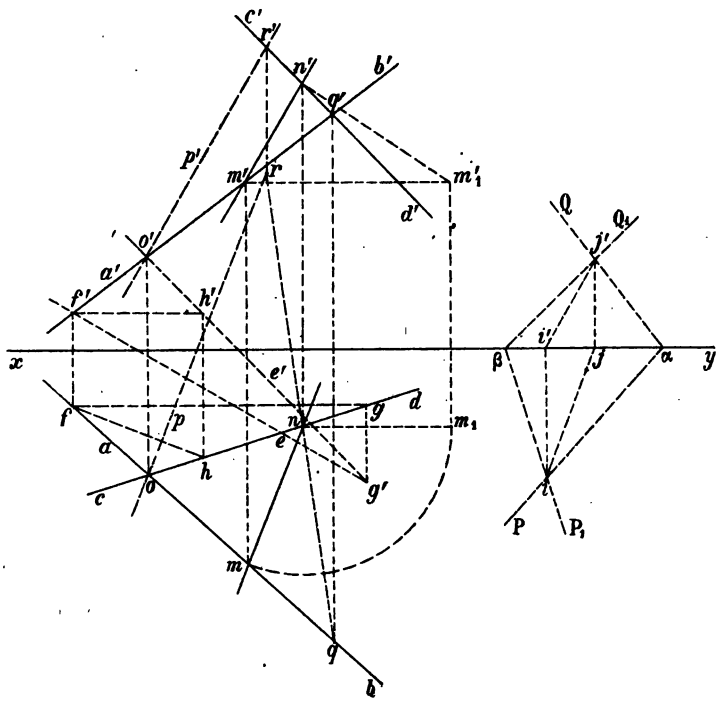


Fig. 30

traces αP et αQ est perpendiculaire à la droite $(ab, a'b')$. De même, en menant par un autre point β de xy les perpendiculaires βP_1 et βQ_1 aux droites cd et $c'd'$, on a les traces d'un plan perpendiculaire à $(cd, c'd')$. L'intersection $(ij, i'j')$ de ces deux plans définit la direction de la perpendiculaire commune.

2° *Position de la perpendiculaire commune.* — On est ramené, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, à construire une droite parallèle à $(op, o'p')$ [ou à $(ij, i'j')$] et s'appuyant sur les droites $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$. Dans notre épure, les droites $(ab, a'b')$ et

(op, $o'p'$) se rencontrent au point (o, o'), de sorte qu'en appliquant les constructions indiquées (I, 167), on est conduit tout naturellement à chercher le point où le plan défini par ces deux droites rencontre la droite (cd, $c'd'$) ; pour cela, on prend, par exemple, pour plan auxiliaire le plan de bout $c'd'$ projetant verticalement (cd, $c'd'$), qui coupe (ab, $a'b'$) au point (q, q') et (op, $o'p'$) au point (r, r') ; qr rencontre cd au point n qu'on rappelle en n' sur $c'd'$; (n, n') est le point cherché. La parallèle (nm, $n'm'$) à (op, $o'p'$) menée par le point (n, n') est la perpendiculaire commune demandée ; on vérifie que ses projections rencontrent les projections de même nom de la droite (ab, $a'b'$) en deux points m et m' situés sur une même ligne de rappel.

3° *Plus courte distance.* — Pour déterminer la distance des deux points (m, m') et (n, n'), on fait une rotation autour de la verticale du point (n, n'), de manière que la projection horizontale de la droite des deux points soit parallèle à la ligne de terre en nm_1 ; le point (m, m') prend ainsi la position (m_1, m'_1) (31) et la distance des deux points, qui est la plus courte distance cherchée, est égale à la distance $n'm'_1$ de leurs nouvelles projections verticales (50).

62. **Exemple II** (*Géométrie cotée*). — *Soit à déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites* $a(3)$ $b(4)$ et $c(3)$ $d(4)$ (*fig.* 31).

1° Menons par le point $b(4)$ la parallèle $b(4)$ $e(3)$ à CD ; nous déterminons ainsi un plan ABE contenant AB et parallèle à CD, dont il est facile de construire une échelle de pente P.

Construisons en fh l'inverse de l'intervalle de ce plan (I, 73) ; toute perpendiculaire au plan ABE se projette suivant une parallèle à P, son intervalle est fh et les cotes vont en croissant sur sa projection dans le sens de f vers h. Par les points $a(3)$ et $c(3)$ on peut alors mener immédiatement les perpendiculaires $a(3)$ $i(4)$ et $c(3)j(4)$ au plan ABE ; ces droites sont parallèles à la droite $f(3)$ $h(4)$ et les plans ABI, CDJ sont les plans menés parallèlement à sa direction par les droites données ; les horizontales de cote 4 de ces deux plans se coupent au point $k(4)$ et leur intersection est la parallèle $l(3)$ $k(4)$ menée par ce point à la droite $f(3)$ $h(4)$; cette droite est la perpendiculaire commune cherchée. Comme vérification, on s'assure qu'elle rencontre les deux droites données aux points projetés en m et n (I, 28).

2° La plus courte distance des deux droites est la distance des points de la droite $k(4)$ $l(3)$ projetés en m et n ; on obtient sa vraie gran-

deur en rabattant le plan vertical projetant cette droite sur le plan horizontal de cote 4. Le point $k(4)$ ne bouge pas, le point $l(3)$ se

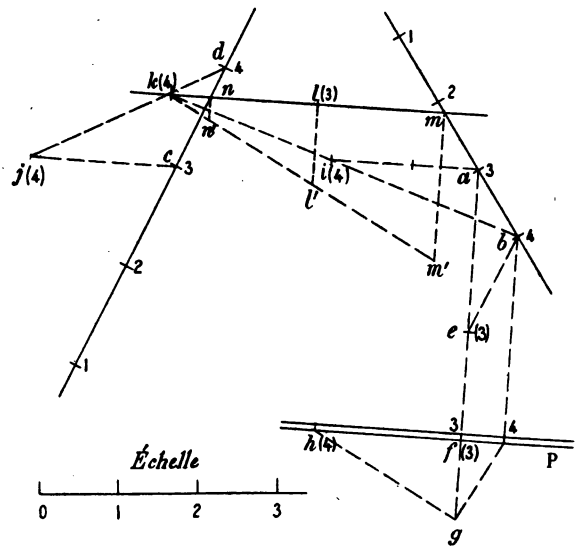


Fig. 31

rabat en l' à une distance de la charnière égale à une unité de l'échelle; on en déduit le rabattement kl' de la droite et les rabattements m' et n' des deux points considérés ; $m'n'$ est la plus courte distance cherchée.

63. **Cas particuliers.** — Lorsque les deux droites données présentent des particularités telles que la direction de la perpendiculaire commune soit connue *a priori*, les constructions précédentes se trouvent notablement simplifiées.

64. **Premier cas.** — *L'une des droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Exemple I. — Soit à déterminer la perpendiculaire commune à la *verticale* $(o, o'z')$ et à la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 32).

1° La droite cherchée devant être perpendiculaire à la verticale $(o, o'z')$ et la rencontrer, est une horizontale dont la projection hori-

zontale passe par le point o, trace de la verticale donnée ; de plus, cette horizontale forme avec $(ab, a'b')$ un angle droit qui se projette horizontalement suivant un angle droit (I, 70). D'où on conclut que la projection horizontale de la perpendiculaire commune est la perpendiculaire om abaissée de o sur ab ; quant à sa projection verticale, on l'obtient en relevant en m', sur $a'b'$, le point m où om rencontre ab, et en menant par m' la parallèle $m'n'$ à xy.

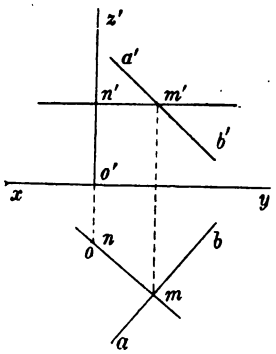


Fig. 32

2° La perpendiculaire commune $(mn, m'n')$ aux deux droites précédentes étant horizontale et rencontrant ces droites aux points (m, m'), (n, n'), leur plus courte distance se projette horizontalement en vraie grandeur, elle est mesurée par le segment mn.

Remarque. — On procède de la même manière si l'une des droites est *de bout*.

65. **Exemple II.** — Le raisonnement précédent montre qu'en *géométrie cotée* on obtient la projection de la perpendiculaire commune à la verticale de trace horizontale o et à la droite $a(2)$ $b(3)$ (*fig.* 33) en menant par o la perpendiculaire om à ab ; la cote de cette droite qui est horizontale est celle du point M où elle rencontre AB, environ 2,4 dans notre épure. La plus courte distance des deux droites est mesurée par la longueur om.

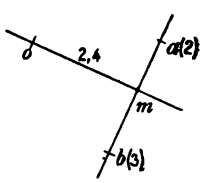


Fig. 33

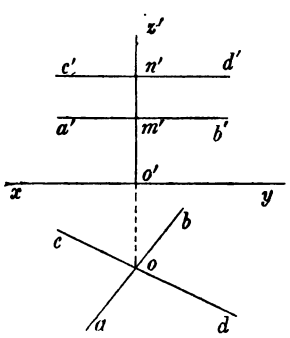


Fig. 34

66. **Deuxième cas.** — *Les deux droites sont parallèles à l'un des plans de projection.*

Exemple I. — Soit à déterminer la perpendiculaire commune aux *deux horizontales* $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$. (*fig.* 34).

1° Les plans parallèles aux deux droites étant horizontaux, la perpendiculaire commune cherchée est verticale (60), et comme elle doit rencontrer les deux droites données, sa trace horizontale est nécessairement le point o où se rencontrent leurs projections horizontales ab et cd; quant à sa projection verticale $o'z'$, elle est dirigée suivant la ligne de rappel du point o.

2° La perpendiculaire commune aux deux droites étant verticale, la plus courte distance se projette verticalement en vraie grandeur ; elle est mesurée par le segment $m'n'$ intercepté sur $o'z'$ par $a'b'$ et $c'd'$.

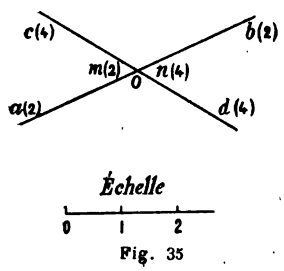


Fig. 35

Remarque. — On procède de la même manière si les deux droites sont *de front*.

67. **Exemple II.** — De même, *en géométrie cotée*, la perpendiculaire commune aux deux horizontales $a(2)$ $b(2)$ et $c(4)$ $d(4)$ est la verticale qui a pour trace horizontale le point o commun à leurs projections ab et cd (*fig.* 35). Leur plus courte distance est la distance des points $m(2)$ et $n(4)$ des deux droites dont les projections coïncident avec o ; cette distance est égale à la différence des cotes des deux horizontales, c'est-à-dire à 2 unités de l'échelle.

68. **Troisième cas.** — *Les projections horizontales des deux droites sont parallèles.*

Exemple I. — Soit à déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites (ab, $a'b'$) et (cd, $c'd'$) (*fig.* 36) dont les *projections horizontales sont parallèles*.

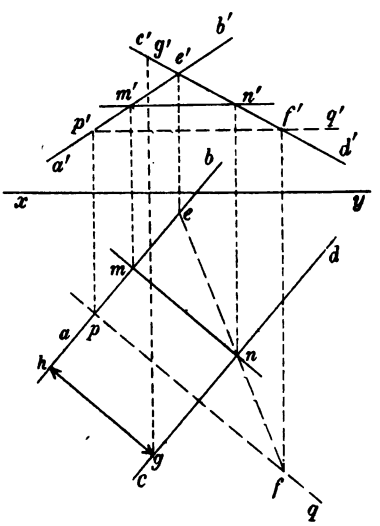


Fig. 36

1° Plus courte distance. — Il est facile d'obtenir *a priori* la plus courte distance des deux droites.

En effet, le plan vertical qui a pour trace horizontale *ab* contient la droite (*ab*, *a'b'*) ; il est parallèle à la droite (*cd*, *c'd'*) ; par suite (60, Rem.), la plus courte distance cherchée est égale à la distance d'un point quelconque (*g*, *g'*) de la droite (*cd*, *c'd'*) au plan vertical de trace horizontale *ab*. Cette distance s'obtient immédiatement en *gh* (I, 199, 2°) en abaissant de la projection horizontale *g* du point (*g*, *g'*) la perpendiculaire *gh* sur la trace horizontale *ab* du plan vertical.

La plus courte distance de deux droites à projections horizontales parallèles est donc égale à la distance de leurs projections horizontales.

2° Perpendiculaire commune. — La direction des plans parallèles à ces droites est celle des plans qui les projettent horizontalement ; il en résulte (60) que la perpendiculaire commune cherchée est une horizontale dont la projection horizontale est perpendiculaire à la direction commune de *ab* et *cd* (*fig.* 36). Pour la construire en position, on applique alors la méthode générale (I, 167) ; par un point quelconque (*p*, *p'*) pris sur (*ab*, *a'b'*) on mène l'horizontale (*pq*, *p'q'*) parallèle à la perpendiculaire commune cherchée, puis en utilisant comme plan auxiliaire le plan de bout *c'd'* projetant verticalement (*cd*, *c'd'*), on cherche le point (*n*, *n'*) où cette dernière droite rencontre le plan déterminé par (*ab*, *a'b'*) et (*cd*, *c'd'*) ; la projection horizontale de la perpendiculaire commune est alors la droite *nm* perpendiculaire à *ab*, et sa projection verticale est la droite *n'm'*, parallèle à *xy* ; on vérifie que ces projections rencontrent les projections de même nom de la droite (*ab*, *a'b'*) en deux points *m* et *m'* situés sur une même ligne de rappel.

Le segment horizontal (*mn*, *m'n'*) se projette horizontalement en vraie grandeur ; *mn* est donc égale à la plus courte distance des deux droites ; ce qui vérifie bien les considérations *a priori* du 1°.

On procède de la même manière lorsque les projections verticales des deux droites données sont parallèles entre elles.

69. **Exemple II.** (*Géométrie cotée*). — Soit à construire la perpendiculaire commune aux deux droites *a*(2)*b*(3) et *c*(2)*d*(3) dont les projections *ab* et *cd*. sont parallèles (*fig.* 37).

1° Les plans verticaux projetant chacune des deux droites étant parallèles, la perpendiculaire commune est perpendiculaire à ces

plans (60) ; c'est donc une horizontale dont la projection est perpendiculaire à *ab*. Or nous avons vu (I, 61) que les projections de toutes les horizontales s'appuyant sur les deux droites concourent en un point ω, que nous savons déterminer ; la perpendiculaire commune étant une de ces horizontales, sa projection est la perpendiculaire *mn* abaissée de ω sur *ab* ; on obtient sa cote en cherchant celle du point M où elle rencontre la droite *a*(2)*b*(3).

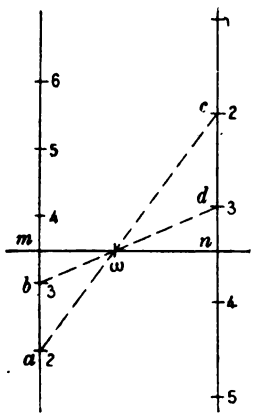


Fig. 37

2° La plus courte distance des deux droites est *mn*, puisque la droite MN est une horizontale.

Ce résultat avait d'ailleurs été établi *a priori* par la démonstration du n° 68, 1°.

70. Quatrième cas. — *L'une des droites est horizontale, l'autre est de front.*

Soit, par exemple, à déterminer la perpendiculaire commune à l'horizontale (*ab*, *a'b'*) et à la droite de front (*cd*, *c'd'*) (*fig.* 38).

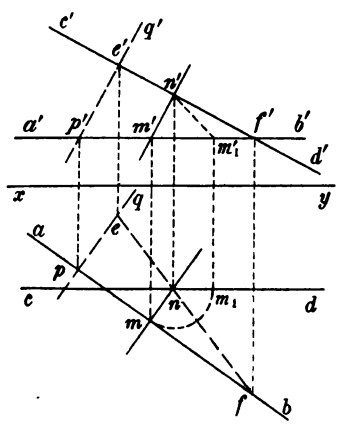


Fig. 38

1° La droite cherchée faisant un angle droit avec chacune des droites données, sa projection horizontale est perpendiculaire à *ab* et sa projection verticale perpendiculaire à *c'd'* (I, 170, Rem.), de sorte que l'on connaît les directions de ses deux projections.

Pour déterminer la perpendiculaire commune en position, on applique la méthode générale (60) ; par un point (*p*, *p'*) de la droite (*ab*, *a'b'*), on mène la droite (*pq*, *p'q'*) dont les projections horizontale et verticale sont respectivement perpendiculaires à *ab* et *c'd'*, et on détermine le point (*n*, *n'*) où le plan défini par les droites (*ab*, *a'b'*) et (*pq*, *p'q'*) rencontre la droite (*cd*, *c'd'*) ; en menant ensuite *nm* perpendiculaire à *ab* et *n'm'* per-

Librairie VUIBERT & NONY, 63, boulevard Saint-Germain, Paris, 5e.

VIENT DE PARAITRE :

Paul DOUMER

LIVRE DE MES FILS

L'HOMME — LE CITOYEN

LA FAMILLE — LA PATRIE

Volume 20 × 13cm, *de* 344 *pages, magnifiquement imprimé en caractère Garamond.*

Broché	3 fr.	»
Relié à l'anglaise, titre or	4 fr.	»
Relié, dos maroquin, tête dorée	6 fr.	»
Édition sur papier d'Arches à la forme : *Broché*	10 fr.	»
Relié amateur, dos et coins en maroquin du Levant, tête dorée	15 fr.	»
Édition sur Japon impérial : *Broché*	20 fr.	»
Relié en maroquin plein du Levant	36 fr.	»

EXTRAIT DE LA PRÉFACE :

.... Les livres peuvent avoir, dans la formation morale des jeunes hommes, une sérieuse influence.

J'ai personnellement gardé la mémoire de lectures, faites entre seize et vingt ans, qui ont eu une action réelle, sinon décisive, sur la direction de ma vie, sur la fixation des règles précises adoptées par moi alors, et restées mon invariable guide, au cours des trente années maintenant écoulées.

Ce souvenir, celui plus récent des entretiens que j'ai eus avec mes fils, des préceptes dont ils étaient entremêlés ou qui en découlaient naturellement, m'ont donné l'idée d'écrire un livre pour la jeunesse.

Je l'entreprends aujourd'hui.

Ce ne doit pas être un nouveau traité de morale et de civisme, mais simplement le résumé du langage tenu par les pères à leurs enfants, sous mille formes, à tout instant, au hasard des conversations familiales.

Ce sera le *livre de mes fils*, le livre des jeunes gens qui arrivent à l'âge d'homme et que la vie appelle.

Quel accueil feront-il à ces pages, aux paroles sérieuses, aux sévères conseils qu'elles renferment ?

CHAPITRE V

APPLICATION DU CHANGEMENT D'UN PLAN DE PROJECTION ET DES ROTATIONS

DÉTERMINATION DES ANGLES

§ I.

Angle de deux droites.

71. Méthode. — On peut obtenir l'angle de deux droites concourantes en amenant leur plan à être parallèle à un plan de projection soit par des changements de plan, soit par des rotations autour d'axes perpendiculaires aux plans de projection. Si le plan de l'angle est quelconque, pour obtenir ce résultat, il faut effectuer soit deux changements de plan successifs, soit deux rotations successives, soit un changement de plan et une rotation.

Nous n'effectuerons pas complètement toutes les constructions qui résultent de cette méthode, car il est de beaucoup préférable, à cause de la simplicité des constructions, d'employer la méthode des rabattements déjà indiquée (I, 212).

Nous nous bornerons à développer la méthode dans le cas où on effectue d'abord un changement de plan vertical, puis une rotation autour d'un axe de bout.

72. **Problème.** — *Soit à déterminer l'angle des deux droites concourantes* (*oa*, *o'a'*) *et* (*ob*, *o'b'*) (*fig.* 39).

1° Par un changement de plan vertical, amenons d'abord le plan de l'angle à être de bout dans le nouveau système.

Pour cela (I, 244), prenons pour nouvelle ligne de terre une droite x_1y_1 perpendiculaire à la projection horizontale ab d'une horizontale $(ab, a'b')$ du plan de l'angle.

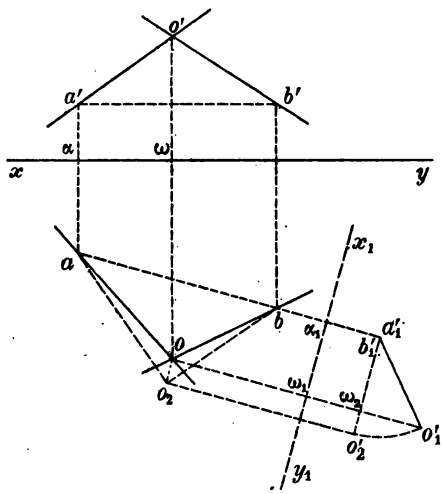


Fig. 39

Les nouvelles projections verticales des points (a, a') et (o, o') s'obtiennent en a'_1 et o'_1 en portant à partir de x_1y_1 sur les nouvelles lignes de rappel $a\alpha_1$ et $o\omega_1$ les longueurs $\alpha_1a'_1 = \alpha a'$ et $\omega_1o'_1 = \omega o'$.

La nouvelle trace verticale du plan de l'angle est par suite la droite $a'_1o'_1$.

2° Faisons tourner le plan de l'angle autour de l'axe $(ab, a'_1b'_1)$ qui est de bout dans le système x_1y_1 et amenons ce plan à être horizontal. Les points (a, a'_1) et (b, b'_1) situés sur l'axe restent immobiles. Le point (o, o'_1) décrit une circonférence projetée verticalement en vraie grandeur suivant la circonférence de centre a'_1 et de rayon $a'_1o'_1$. Nous arrêtons la rotation lorsque la trace verticale $a'_1o'_1$ du plan est venue en $a'_1o'_2$, parallèle à la ligne de terre x_1y_1. Le point (o, o'_1) est alors venu en (o_2, o'_2) (32) et l'angle des deux droites est projeté horizontalement en vraie grandeur en $\widehat{ao_2b}$.

73. Remarque. — Les constructions qu'on vient d'effectuer ne sont autres que celles qu'on fait dans le rabattement du plan de l'angle sur un plan horizontal en prenant $(ab, a'b')$ comme charnière. En effet, le triangle $a'_1o'_1\omega_2$ est le triangle du rabattement du point (o, o') que définit la règle du triangle rectangle (I, 176) et le point o_2 est le rabattement du point (o, o'). Il est d'ailleurs préférable d'effectuer directement le rabattement signalé, car on évite ainsi le tracé de la ligne de terre x_1y_1 et la construction du point o'_2. Au point de vue graphique, l'application de la règle du triangle rec-

tangle (I, 276) réalise d'un seul coup la construction que la méthode précédente décompose en deux parties : 1° construction du point (o, o_1'); 2° construction du point (o_2, o_2').

Ces considérations justifient ce qui a été dit au n° 71.

§ II.

Angle d'une droite et d'un plan.

74. On a déjà vu (I, 229) que la détermination de l'angle d'une droite et d'un plan se ramenait à la recherche de l'angle formé par la droite et une perpendiculaire au plan; l'angle de ces deux droites peut s'obtenir par des changements de plans ou des rotations autour d'axes verticaux ou de bout (71); mais il est préférable au point de vue graphique de faire un rabattement (I, 230).

Nous n'appliquerons les changements de plan ou les rotations qu'au cas particulier suivant :

75. **Angles d'une droite avec les plans de projection.** — On a déjà vu (I, 232, Rem.) que l'angle d'une droite de front avec le plan horizontal est égal à l'angle aigu de sa projection verticale avec la ligne de terre et que l'angle d'une droite horizontale avec le plan vertical est égal à l'angle aigu de sa projection horizontale avec la ligne de terre.

Par suite, on déterminera les angles que fait une droite avec les plans de projection en l'amenant à être successivement parallèle à l'un de ces plans soit par un changement de plan (I, 241; 19), soit par une rotation (36, 37).

76. **I. Méthode du changement de plan.** — Les épures relatives à ce problème ont déjà été faites (I, 242) et (19). Nous n'y reviendrons pas.

77. **II. Méthode des rotations. — Problème.** — *Soit à déterminer les angles de la droite (ab, a'b') avec les deux plans de projection (fig. 40).*

1° Pour obtenir l'angle de la droite avec le plan horizontal, amenons cette droite à être de front (36) en la faisant tourner autour de la ver-

ticale du point (a, a'). Cette rotation ne change pas l'angle de la droite avec le plan horizontal (36). La projection horizontale b du point (b, b') se déplace sur la circonférence de centre a et de rayon ab ; nous l'arrêtons en b_1 de façon que ab_1 soit parallèle à la ligne de terre ; la projection verticale du point est alors venue en b'_1 à l'intersection de la ligne de rappel du point b_1 et de la parallèle menée par b' à la ligne de terre (31).

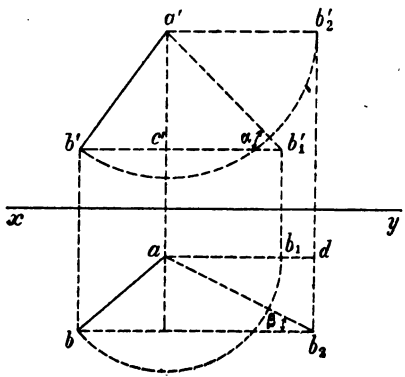


Fig. 40

La nouvelle position de la droite est $(ab_1, a'b'_1)$ et l'angle de la droite avec le plan horizontal est l'angle $a'b'_1b' = \alpha$.

2° On amène ensuite la droite à être horizontale par une rotation autour de la droite de bout du point (a, a'). Dans cette rotation l'angle de la droite avec le plan vertical ne change pas. La projection verticale b' du point (b, b') se déplace sur la circonférence de centre a' et de rayon $a'b'$; nous l'arrêtons dans ce déplacement en b'_2 de façon que la nouvelle projection verticale $a'b'_2$ soit parallèle à la ligne de terre ; la projection horizontale du point est alors à l'intersection b_2 de la ligne de rappel du point b'_2 et de la parallèle à la ligne de terre menée par le point b. La nouvelle position de la droite est $(ab_2, a'b'_2)$ et l'angle de la droite avec le plan vertical est égal à l'angle $ab_2b = \beta$.

Remarque. — Les deux longueurs $a'b'_1$ et ab_2 sont égales comme toutes deux égales à la distance des deux points (a, a') et (b, b') qui a été rendue successivement parallèle à chacun des plans de projection et par suite se projette en vraie grandeur sur chacun d'eux.

78 (*). **Problème inverse.** — *Mener par un point donné* (a, a') *une droite faisant avec les plans de projection des angles aigus donnés,* α *avec* H *et* β *avec* V *(fig. 41).*

(*) Le texte en petits caractères indique des applications qu'on peut, sans inconvénient, négliger dans une première lecture.

Nous allons déterminer un second point (b, b') de la droite en reprenant en sens inverse les constructions du problème précédent. Pour cela, donnons-nous arbitrairement la distance δ du point (a, a') au point cherché ; cette distance est figurée sur chacune des projections soit en ab_2, soit en $a'b'_1$ (*fig.* 40) (77, Rem.).

Pour cela, construisons d'abord le triangle rectangle adb_2 (*fig.* 41) qui est défini en grandeur et en position, car la longueur de son hypoténuse est égale à δ et l'angle aigu en a est l'angle donné β ; on sait en outre que la direction du côté ad est celle de la ligne de terre.

Construisons ensuite le triangle $a'c'b'_1$, défini en grandeur par son hypoténuse $a'b'_1 = \delta$, son angle $c'a'b'_1 = 90° - \alpha$, et en position par la direction de $a'c'$ qui est perpendiculaire à la ligne de terre. On obtient alors deux lieux géométriques de la projection horizontale b en menant la parallèle à la ligne de terre par le point b_2 et la circonférence de centre a et de rayon $ab_1 = c'b'_1$.

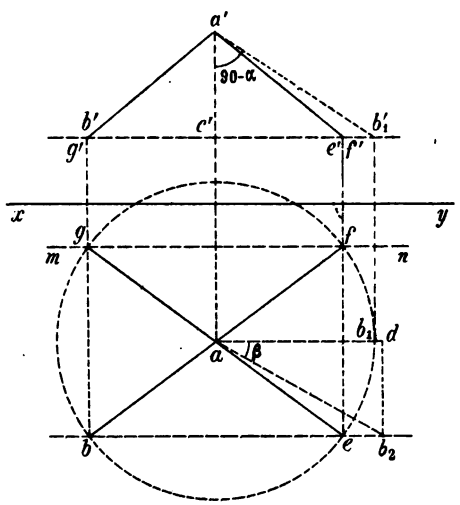


Fig. 41

Il faut en outre remarquer que l'angle β construit en dab_2 aurait pu être porté dans le sens contraire à partir du côté ad, ce qui donne comme lieu du point b la droite mn symétrique de la droite b_2b par rapport à ad.

On peut ainsi obtenir en b, e, f, g quatre projections horizontales pour le point cherché ; on trouve leurs projections verticales en rappelant ces points sur la droite b'_1c'. Les quatre points (b, b'), (e, e'), (f, f'), (g, g') avec le point (a, a') définissent respectivement les droites cherchées $(ab, a'b')$, $(ae, a'e')$, $(af, a'f')$, $(ag, a'g')$; leurs projections horizontales sont deux à deux confondues, il en est de même de leurs projections verticales.

79. Discussion. — 1° La construction précédente donne *quatre solutions* si la parallèle à la ligne de terre menée par b_2 coupe la circonférence de centre a ; pour cela, il faut et suffit que la distance du centre à cette droite soit plus petite que le rayon de la circonférence, c'est-à-dire

$$db_2 < c'b'_1.$$

Or les triangles rectangles adb_2 et $a'c'b'_1$ nous donnent les relations

$$db_2 = ab_2 \sin \beta = \delta \sin \beta,$$
$$c'b'_1 = a'b'_1 \sin (90° - \alpha) = \delta \cos \alpha,$$

d'où la condition

$$\delta \sin \beta < \delta \cos \alpha,$$

ou

$$\sin \beta < \cos \alpha,$$

qui s'écrit

$$\sin \beta < \sin (90^\circ - \alpha).$$

Or α et β sont des angles aigus ; il en est donc de même de $90^\circ - \alpha$, et comme les sinus de deux angles aigus sont dans le même ordre de grandeur que ces angles, on obtient $\beta < 90^\circ - \alpha$,

ou

$$\alpha + \beta < 90^\circ. \qquad (1)$$

2° Si les droites lieux du point b sont tangentes à la circonférence, on n'obtient plus que *deux solutions* ; dans ce cas, $db_2 = c'b'_1$, d'où l'on déduit la relation $\alpha + \beta = 90^\circ$.

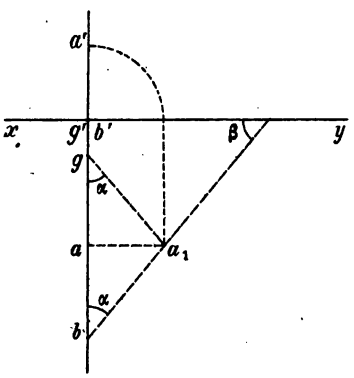


Fig. 42

Les deux droites obtenues sont alors de *profil* et on les construit plus simplement (*fig.* 42) en rabattant le plan de profil du point (a, a') sur le plan horizontal de projection, ce qui amène le point en a_1 (I, 185, 2°). On construit alors les deux droites a_1b et a_1g qui font avec aa' l'angle α qui est rabattu en vraie grandeur. On obtient ainsi les deux droites $(ab, a'b')$, $(ag, a'g')$.

3° Les droites lieux du point b ne coupent plus la circonférence si $db_2 > c'b'_1$, c'est-à-dire si

$$\alpha + \beta > 90^\circ.$$

Le problème est alors *impossible*.

80. Remarque. — De cette discussion, il résulte que la *condition nécessaire et suffisante* pour que le problème ait des solutions est

$$\alpha + \beta \leqslant 90^\circ.$$

Il est facile de montrer *a priori* que cette condition est *nécessaire*. En effet, soient AB une droite de l'espace et Ab et Ba' ses deux projections sur les deux plans H et V (*fig.* 43).

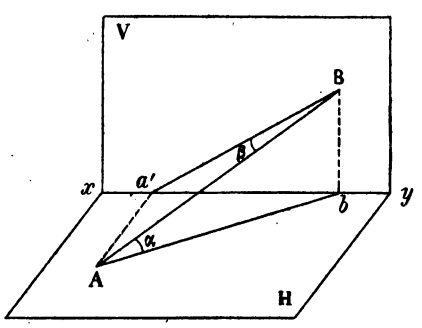


Fig. 43

On sait que l'angle aigu α formé par la droite AB avec sa projection horizontale est plus petit que l'angle a'AB qu'elle forme avec une autre droite Aa' du plan horizontal (Grévy, *Géométrie dans l'espace*). Or l'angle a'AB est le complément de l'angle a'BA $= \beta$ dans le triangle rectangle Aa'B.

On a donc $\alpha < 90° - \beta$,
c'est-à-dire $\alpha + \beta < 90°$.

81. Problème. — *Mener dans un plan donné par un point donné de ce plan les droites faisant un angle donné α avec le plan horizontal.*

Soit un plan défini par deux droites concourantes $(oa, o'a')$ $(ob, o'b')$ (*fig.* 44) ; proposons-nous de mener par le point (o, o') les droites du plan faisant avec le plan horizontal un angle donné α.

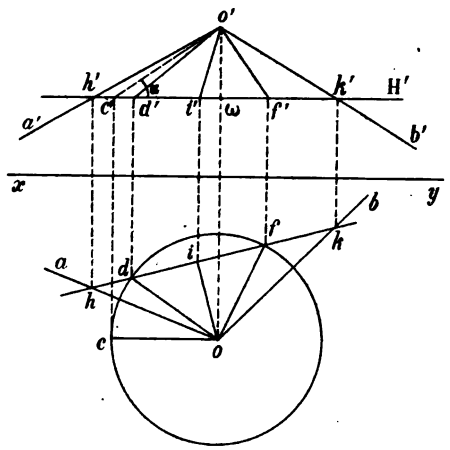


Fig. 44

Menons d'abord par le point (o, o') une frontale $(oc, o'c')$ faisant l'angle donné α avec le plan horizontal ; sa projection horizontale est la parallèle oc à la ligne de terre menée par le point o (I, 106, 2°) et sa projection verticale est la droite $o'c'$ menée par le point o' et faisant avec la direction de la ligne de terre l'angle donné α (I, 232, Rem.).

Faisons maintenant tourner la droite $(oc, o'c')$ autour de la verticale du point (o, o') jusqu'à ce qu'un deuxième point (c, c') de la droite différent de (o, o') soit venu dans le plan donné. Dans cette rotation, l'angle de la droite avec le plan horizontal ne change pas (38), par suite, lorsque la droite aura un nouveau point dans le plan, comme elle y a déjà le point (o, o'), elle y sera tout entière et fera bien avec le plan horizontal l'angle α.

Dans la rotation considérée, le point (c, c') reste dans le plan horizontal H' où il décrit une circonférence projetée horizontalement suivant la circonférence de centre o et de rayon oc (31). Le plan H' coupe le plan donné suivant l'horizontale $(hk, h'k')$, qui rencontre la circonférence précédente aux points (d, d') et (f, f') qui sont les points du plan donné avec lesquels le point (c, c') vient coïncider dans la rotation.

Les droites cherchées sont donc les droites $(od, o'd')$ et $(of, o'f')$.

82. Discussion. — Le problème n'a de solutions que si la droite hk rencontre la circonférence de centre o et de rayon oc, ce qui exige que le rayon oc soit plus grand que la distance oi du centre o à cette droite.

Or si nous considérons les pentes p et p' du plan donné et de la droite cherchée, relatives au plan horizontal, on a (I, 21)

$$p = \frac{\omega o'}{oi} \text{ et } p' = \frac{\omega o'}{oc}$$

car la droite $(oi, o'i')$ est une ligne de plus grande pente du plan relative au plan horizontal.

On tire de là $\quad oi = \frac{\omega o'}{p}, \qquad oc = \frac{\omega o'}{p'},$

et l'inégalité $oc > oi$ s'écrit

$$\frac{\omega o'}{p'} > \frac{\omega o'}{p},$$

d'où l'on tire $\quad p > p'. \qquad (1)$

Or (I, 21) $p = \operatorname{tg} \beta$, $p' = \operatorname{tg} \alpha$, en désignant par β l'angle aigu du plan donné et du plan horizontal.

Par suite, l'inégalité (1) donne $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$, d'où l'on déduit, en tenant compte de ce que β et α sont aigus, $\beta > \alpha$.

Le problème n'est donc possible que si l'angle que la droite doit faire avec le plan horizontal est inférieur à l'angle du plan donné avec le plan horizontal.

83. Remarque. — Le problème précédent est le même que le suivant : *Mener dans un plan, par un point de ce plan, une droite de pente donnée par rapport au plan horizontal.* Ce dernier problème a déjà été traité (I, 45).

§ III.

Angle de deux plans.

84. Méthode. — On a vu (I, 220, 1°) que les angles dièdres formés par deux plans verticaux sont mesurés par les angles que font leurs traces horizontales.

Par suite, on déterminera ces angles en amenant l'intersection des deux plans à être verticale par des changements de plan ou des rota-

tions autour d'axes perpendiculaires aux plans de projection. Si les plans donnés sont quelconques, il faut, pour obtenir ce résultat, effectuer soit deux changements de plan successifs, soit deux rotations successives, soit un changement de plan et une rotation.

Nous ne développerons pas entièrement toutes les constructions, qui résultent de cette méthode, car il est de beaucoup préférable, à cause de la simplicité des constructions, d'employer la méthode des rabattements déjà indiquée (I, 219).

Nous nous bornerons à appliquer la méthode en effectuant un changement de plan vertical, puis une rotation autour d'un axe de bout.

85. Problème. — *Déterminer les angles formés par deux plans définis par leurs traces.*

Soient PαQ, $P_1\beta Q_1$ les deux plans donnés (*fig.* 45). Leur intersection est la droite (*ab*, *a'b'*).

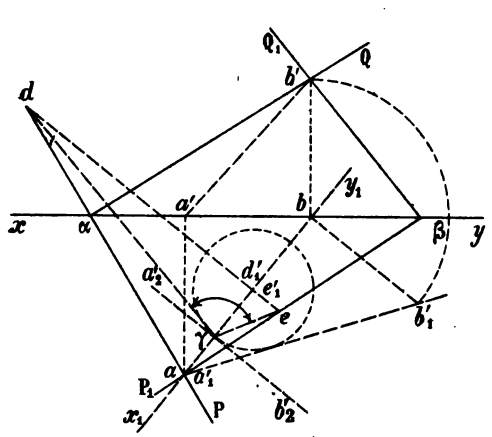


Fig. 45

1° Changeons le plan vertical de projection de manière à rendre la droite (*ab*, *a'b'*) de front dans le nouveau système. Pour cela (I, 241), prenons pour nouvelle ligne de terre x_1y_1 la droite *ab*. La nouvelle projection verticale de la droite (*ab*, *a'b'*) s'obtient en $a'_1b'_1$, en faisant le changement de plan pour les deux points (*a*,*a'*) et (*b*,*b'*) (I, 236).

Dans le nouveau système, les deux plans sont définis par leurs traces $\alpha ab'_1$ et $\beta ab'_1$.

2° Pour amener l'intersection (*ab*, $a'_1b'_1$) des deux plans à être verticale dans le nouveau système x_1y_1, faisons lui subir une rotation autour de l'axe de bout (*de*, $d'_1e'_1$) situé dans le plan horizontal de projection.

Dans cette rotation, la trace verticale commune aux deux plans reste tangente à la circonférence de centre d'_1 et tangente à la droite $a'_1b'_1$. Nous arrêterons la rotation lorsque cette trace est devenue perpendiculaire à la ligne de terre x_1y_1 en $a'_2b'_2$; les deux plans sont alors rendus verticaux (I, 129, 2°) ; leurs traces horizontales sont les droites γe et γd, car les points (d,d'_1) et (e,e'_1) situés sur l'axe de la rotation n'ont pas bougé et les traces horizontales des plans rendus verticaux passent par les projections horizontales d et e de ces deux points.

Par suite, les angles des deux plans sont égaux aux angles que forment les deux droites γe et γd.

Remarque. — Les constructions de l'épure précédente ne diffèrent pas de celles qui donnent l'angle des deux plans par le rabattement sur le plan horizontal du plan mené perpendiculairement à l'intersection $(ab, a'b')$ par la droite de du plan horizontal (I, 219).

Angles d'un plan avec les plans de projection.

86. Méthode. — On a déjà vu (I, 222) que les angles formés par un plan de bout avec le plan horizontal sont mesurés par les angles formés par la trace verticale du plan de bout avec la ligne de terre et que les angles formés par un plan vertical quelconque avec le plan vertical de projection sont mesurés par les angles que fait la trace horizontale du plan vertical donné avec la ligne de terre.

Par suite, on déterminera les angles d'un plan avec les plans de projection en amenant ce plan à être perpendiculaire à l'un des plans de projection soit par un changement de plan (24 ou I, 244), soit par une rotation (41).

87. I. Méthode du changement de plan. — Les épures relatives à ce problème ont déjà été faites (I, 247) et (25). Nous n'y reviendrons pas.

88. II. Méthode des rotations. — **Problème.** — *Soit à déterminer les angles du plan* PαQ *avec les deux plans de projection* (*fig.* 46).

1° Par une rotation autour d'un axe vertical $(o, o'z')$ choisi arbitrairement, amenons le plan donné à être de bout (41). Dans cette rotation, l'angle aigu du plan avec le plan horizontal ne change pas (42, 2°). Cherchons le point de rencontre de l'axe et du plan à l'aide

de l'horizontale (oa, $o'a'$) et faisons tourner la trace horizontale αP du plan autour du point o jusqu'à ce qu'elle soit devenue en βP_1 perpendiculaire à la ligne de terre xy ; le plan est alors rendu de bout et sa trace verticale est $\beta o'$. Les angles du plan avec le plan horizontal sont donc les angles $o'\beta x$ et $o'\beta y$.

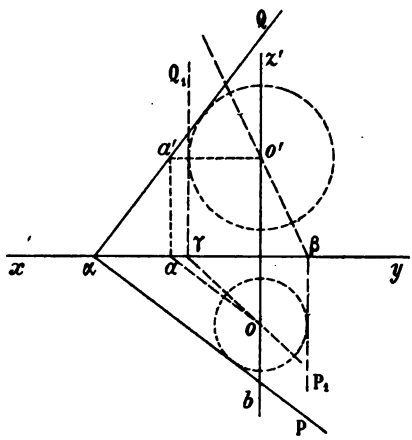


Fig. 46

2° Par une rotation autour de la droite de bout du point (o, o'), amenons le plan à être vertical (41). Dans cette rotation, l'angle du plan avec l'axe de bout ne change pas ; par suite, il en est de même de l'angle aigu du plan avec le plan vertical, qui est le complément du précédent. Dans la rotation, le point (o, o') reste fixe ; la trace verticale αQ du plan tourne autour du point o' et nous arrêtons son mouvement lorsqu'elle est devenue en γQ_1 perpendiculaire à xy. Le plan est alors rendu vertical et sa trace horizontale est γo. Les angles du plan avec le plan vertical sont par suite les angles $o\gamma x$ et $o\gamma y$.

89. **Problème.** — *Mener par une droite donnée* (ab, $a'b'$) *les plans faisant avec le plan horizontal un angle donné* α (*fig.* 47).

Menons d'abord par le point (a, a') un plan de bout faisant l'angle α avec le plan horizontal ; sa trace verticale est la droite $Q\beta$ menée par a' et faisant l'angle α avec la ligne de terre (I, 222) et sa trace horizontale βP est perpendiculaire à la ligne de terre.

Puis faisons tourner le plan $P\beta Q$ autour de la verticale du point (a, a') jusqu'à ce qu'il contienne un deuxième point de la droite, sa trace horizontale (b, b'), par exemple. Dans une telle rotation, l'angle du plan avec le plan horizontal reste fixe ; par suite lorsque le plan passera par le point (b, b'), comme il passe déjà par le point (a, a'), il contiendra la droite (ab, $a'b'$) toute entière et fera bien l'angle α avec le plan horizontal.

Dans la rotation considérée, la trace horizontale du plan reste tangente à la circonférence de centre a tangente à la droite βP. Le plan contiendra le point (b, b') lorsque sa trace horizontale passera par b; on obtient par suite cette trace en menant par b les tangentes bP_1 et bP_2 à la circonférence à laquelle la trace reste tangente.

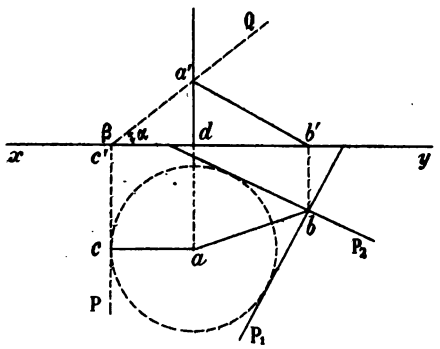


Fig. 47

Les plans cherchés sont alors définis par la droite $(ab, a'b')$ et leur trace horizontale respective (bP_1, xy) ou (bP_2, xy).

90. Discussion. — Le problème a des solutions si on peut mener par b des tangentes à la circonférence de centre a et de rayon ac, ce qui exige

$$ab \geqslant ac. \qquad (1)$$

Or si nous considérons les pentes p et p' du plan $P\beta Q$ et de la droite $(ab, a'b')$ relatives au plan horizontal, on a (I, 21)

$$p = \frac{a'd}{ac} \qquad \text{et} \qquad p' = \frac{a'd}{ab},$$

car la droite $(ac, a'c')$ est une ligne de plus grande pente du plan $P\beta Q$ par rapport au plan horizontal.

On tire de là

$$ab = \frac{a'd}{p'}, \qquad ac = \frac{a'd}{p}$$

et l'inégalité (1) s'écrit

$$\frac{a'd}{p'} \geqslant \frac{a'd}{p},$$

d'où l'on tire

$$p \geqslant p'. \qquad (2)$$

Si l'on désigne par α et α' les angles aigus formés respectivement par le plan et la droite avec le plan horizontal, on a (I, 21)

$$p = \operatorname{tg} \alpha, \quad p' = \operatorname{tg} \alpha'.$$

Par suite, l'inégalité (2) s'écrit

$$\operatorname{tg} \alpha \geqslant \operatorname{tg} \alpha',$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de ce que α et α' sont des angles aigus,

$$\alpha \geqslant \alpha'.$$

91. Remarque. — Le problème précédent est le même que le suivant : *Mener par une droite donnée un plan de pente donnée par rapport au plan horizontal.* Ce dernier problème a déjà été traité (I, 46).

92. **Problème.** — *Mener par un point donné les plans faisant des angles donnés avec les plans de projection.*

Ce problème se ramène à un problème précédent (78) en utilisant une propriété déjà signalée (I, 72) : *Si une droite et un plan sont perpendiculaires, les angles aigus qu'ils forment avec un même plan sont complémentaires.* Par suite, pour mener par un point A les plans faisant avec les plans de projection H et V des angles aigus donnés α et β, on construit d'abord (78) les droites passant par A et qui font respectivement avec les plans H et V les angles $90° - \alpha$ et $90° - \beta$ (compléments des angles donnés) ; puis, en menant par A les plans perpendiculaires à ces droites, on obtient les plans cherchés.

93. Discussion. — On a vu (79) que le problème auquel on est ramené n'a de solutions que si la somme des angles que fait la droite avec les deux plans de projection est inférieure ou égale à 90°, c'est-à-dire si l'inégalité

$$90° - \alpha + 90° - \beta \leqslant 90°$$

est vérifiée ; la condition nécessaire et suffisante de possibilité du problème est donc

$$\alpha + \beta \geqslant 90°. \qquad (1)$$

Il y a quatre solutions dans le cas général où $\alpha + \beta > 90°$ et deux dans le cas limite où $\alpha + \beta = 90°$ (79).

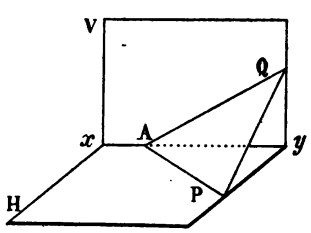


Fig. 48

Remarque. — Il est facile de montrer *a priori* que la condition (1) est *nécessaire*. En effet, si on considère le trièdre formé par les deux plans de projection H et V et un plan PAQ qui fait avec eux les angles α et (*fig.* 48), on sait que la somme de ses trois dièdres est supérieure à deux droits (Grévy, *Géométrie dans l'espace*, 418). On a donc l'inégalité

$$\alpha + \beta + 90° > 180°,$$

car le dièdre formé par H et V est droit ; d'où l'on déduit la condition nécessaire

$$\alpha + \beta > 90°.$$

§ IV.

Détermination des faces et des dièdres d'un angle trièdre.

94. **Problème.** — *Soit à déterminer les éléments (faces et dièdres) d'un*

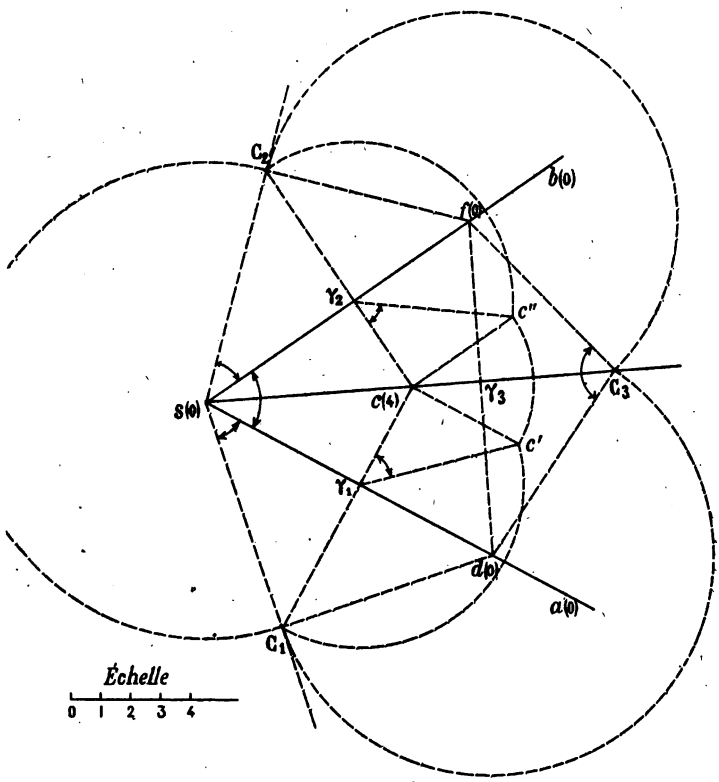


Fig. 49

angle trièdre défini par son sommet s(o) et trois points a(o), b(o), c(4) situés sur chacune de ses arêtes (fig. 49).

1. Détermination des faces. — 1° La face $a(o)s(o)b(o)$ dont le plan est horizontal, est projetée en vraie grandeur sur l'épure.

2° Pour avoir la vraie grandeur de la face $a(o)s(o)c(4)$, on rabat son plan sur

le plan de comparaison autour de la charnière $s(o)a(o)$. Le point $c(4)$ se rabat (I, 177) en C_1 sur la perpendiculaire $c\gamma_1$ menée par le point c à la projection sa de la charnière, et à une distance γ_1C_1 du point γ_1 égale à l'hypoténuse du triangle rectangle γ_1cc' qui a pour côtés de l'angle droit la distance $c\gamma_1$ du point c à la projection sa de la charnière et la longueur cc' égale à la différence des cotes du point $c(4)$ et de la charnière, soit quatre unités de l'échelle. La vraie grandeur de la face est l'angle asC_1.

3° En rabattant de même le plan de la face $b(o)s(o)c(4)$ sur le plan de comparaison autour de la charnière $s(o)b(o)$, on obtient en C_2 le nouveau rabattement du point $c(4)$, à l'aide du triangle rectangle de rabattement γ_2cc''. La vraie grandeur de la face cherchée est l'angle bsC_2.

95. *Vérification.* — Les deux rabattements précédents donnent en sC_1 et sC_2 la vraie grandeur de la distance des points $s(o)$ et $c(4)$. On vérifie l'égalité de ces deux longueurs en traçant un arc de cercle de centre s et de rayon sC_1 et en constatant qu'il passe par le point C_2.

Cette remarque sera utilisée plus loin.

96. **II. Détermination des dièdres.** — 1° On sait (I, 178, Rem. II) que les triangles de rabattement déterminent incidemment l'angle formé par le plan rabattu avec le plan horizontal sur lequel on rabat. Cette remarque montre qu'on a déterminé en $\widehat{c\gamma_1c'}$ et $\widehat{c\gamma_2c''}$ dans les deux triangles de rabattement du point $c(4)$ les vraies grandeurs des angles rectilignes des dièdres d'arêtes $s(o)a(o)$ et $s(o)b(o)$.

2° Pour construire le rectiligne du dièdre d'arête $s(o)c(4)$, menons la perpendiculaire à cette arête, par le point $c(4)$, dans chacune des faces qui la contiennent. Pour cela, utilisons les rabattements de ces faces ; la perpendiculaire située dans la face $a(o)s(o)c(4)$ se rabat sur le plan horizontal suivant la droite C_1d menée par le point C_1 perpendiculairement au rabattement sC_1 de l'arête $s(o)c(4)$. De même, la perpendiculaire contenue dans la face $b(o)s(o)c(4)$ est rabattue suivant la droite C_2f, menée par le point C_2 perpendiculairement au rabattement sC_2 de l'arête $s(o)c(4)$.

Pour obtenir la vraie grandeur du rectiligne ainsi défini par ses côtés $c(4)d(o)$ et $c(4)f(o)$, on rabat son plan sur le plan de comparaison autour de la charnière $d(o)f(o)$. On remarque que les longueurs dC_1 et fC_2 sont les vraies grandeurs des deux côtés $d(o)c(4)$ et $f(o)c(4)$ du triangle $c(4)d(o)f(o)$, et que ces vraies grandeurs vont se retrouver dans le nouveau rabattement ; par suite, le nouveau rabattement C_3 du point $c(4)$ est à l'intersection des circonférences décrites des points d et f comme centres avec les rayons respectifs dC_1 et fC_2. L'angle dC_3f est la vraie grandeur du rectiligne cherché.

97. *Vérifications.* — 1° Comme la droite $s(o)c(4)$ est perpendiculaire au plan $d(o)c(4)f(o)$, sa projection sc doit être perpendiculaire à la trace horizontale df de ce plan (I, 169).

2° Le rabattement C_3 du point $c(4)$ autour de la charnière $d(o)f(o)$ doit se

trouver sur la perpendiculaire abaissée du point c sur la droite df, perpendiculaire qui n'est autre que la droite sc.

3° D'après la règle du rabattement (I, 176), la longueur γ_3C_3 doit être égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit la longueur $c\gamma_3$ et la cote du point $c(4)$. Cette vérification n'a pas été indiquée sur l'épure, pour éviter de la surcharger.

98. **Problème inverse.** — *Connaissant les trois faces d'un trièdre, construire la projection cotée de ce trièdre.*

Nous nous bornerons au cas où l'une des faces est dans un plan horizontal. Cette face se projette en vraie grandeur suivant l'angle $a(o)s(o)b(o)$ (*fig.* 50), qui est égal à l'un des trois angles donnés et dont la position sur l'épure a été choisie arbitrairement. Mettons en évidence sur l'épure les deux autres faces du trièdre en figurant leurs rabattements sur le plan de comparaison autour des charnières $s(o)a(o)$ et $s(o)b(o)$; pour cela, figurons les angles $a(o)s(o)x$ et $b(o)s(o)y$ égaux respectivement aux deux autres faces du trièdre. Les deux droites sx et sy sont les rabattements de la troisième arête SC du trièdre autour des deux charnières considérées ; pour obtenir les deux rabattements C_1 et C_2 d'un point C de cette droite, on utilise la remarque faite au n° 95 en prenant sur sx et sy deux longueurs égales sC_1 et sC_2. Il reste alors à effectuer les constructions inverses de celles qui ont servi à déterminer les vraies grandeurs des faces lorsque la projection du trièdre est donnée (94).

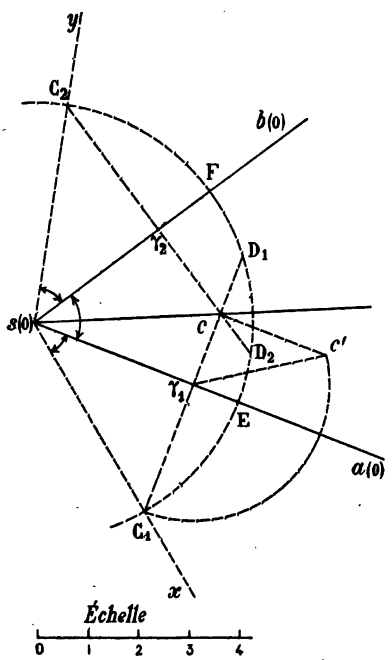


Fig. 50.

Les perpendiculaires $C_1\gamma_1$ et $C_2\gamma_2$ abaissées des rabattements C_1 et C_2 sur les charnières sa et sb se coupent au point c, projection du point C rabattu en C_1 et C_2.

La cote de ce point se détermine en cc' en construisant le triangle rectangle $c\gamma_1c'$ du rabattement du point C_1, dans lequel on connaît un côté de l'angle droit $c\gamma_1$ et l'hypoténuse γ_1C_1 (I, 176).

La troisième arête du trièdre est alors définie par le point $s(o)$ et le point projeté en c et qui a pour cote la longueur cc'. Comme cette cote peut être

prise indifféremment positive ou négative, on obtient en général deux trièdres symétriques par rapport au plan de comparaison.

99. Discussion.— On a vu en Géométrie que les faces d'un trièdre remplissent *nécessairement* les deux conditions suivantes:

1° la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres;

2° la somme des trois faces est plus petite que quatre angles droits.

Nous allons montrer, à l'aide de la construction précédente, que ces conditions sont *suffisantes* pour qu'avec trois faces données on puisse construire un trièdre. . .

En effet, cette construction détermine, sans aucune condition, la projection c par l'intersection des deux perpendiculaires $C_1\gamma_1$ et $C_2\gamma_2$ aux droites concourantes sa et sb. Mais la construction du triangle rectangle $c\gamma_1c'$, qui sert à trouver la cote du point projeté en c n'est possible que si la longueur $c\gamma_1$ du côté de l'angle droit est plus petite que celle de l'hypoténuse $C_1\gamma_1$. Or dans la circonférence de centre s et de rayon sC_1, la corde $C_1\gamma_1D_1$ perpendiculaire au rayon sa, a son milieu au point γ_1, le problème n'est donc possible que dans le cas où le point c est à l'intérieur de cette circonférence, puisqu'on doit avoir $\gamma_1c < \gamma_1D_1$.

Supposons que la face projetée en asb soit la plus grande des trois faces données; l'arc EF, qui a même mesure que cette face, est plus grand que les arcs $EC_1 = ED_1$ et $FC_2 = FD_2$ qui ont même mesure que les deux autres faces; par suite les deux points D_1 et D_2 se trouvent sur l'arc EF.

En outre, comme la face asb est supposée plus petite que la somme des deux autres, les deux arcs ED_1 et FD_2 doivent empiéter l'un sur l'autre. Par suite, si un mobile décrit la circonférence à partir du point C_1 dans le sens C_1E, il rencontre les points dans l'ordre $C_1ED_2D_1FC_2$ et atteint C_2 avant d'être revenu au point C_1, car la somme des trois faces étant supposée inférieure à quatre droits, la somme des arcs C_1E, EF, FC_2 est plus petite qu'une circonférence. Par suite de cette disposition, les cordes C_1D_1, C_2D_2 se coupent bien en un point c intérieur à la circonférence et le problème est possible.

100. **Application** : *Réduction d'un angle à l'horizon.* — On désigne sous ce titre un problème qui se présente à chaque instant lorsqu'on fait la carte d'un pays. Il est signalé dans le Traité de Géométrie descriptive composé par Monge, pour l'usage des élèves de l'École Normale supérieure (édition de 1811). Il y est présenté en ces termes :

« Lorsqu'on se propose de lever la carte d'un pays, on conçoit ordinairement que les points remarquables soient liés entre eux par des lignes droites qui forment des triangles, et il s'agit ensuite de rapporter ces triangles sur la carte, au moyen d'une échelle plus petite, et de les placer entre eux dans le même ordre que ceux qu'ils représentent. Les opérations qu'il faut faire sur le terrain, consistent principalement dans la mesure des angles de ces triangles; et pour que ces angles puissent être rapportés directement sur la carte, ils doivent être chacun dans un plan horizontal, parallèle à celui de la carte. Si le plan de l'angle est oblique sur l'horizon, ce n'est plus l'angle lui-même qu'il faut rapporter, c'est sa projection horizontale; et il est toujours

possible de trouver cette projection, lorsqu'après avoir mesuré l'angle lui-même, on a de plus mesuré ceux que ses deux côtés forment avec l'horizon, ce qui donne lieu à l'opération suivante, connue sous le nom de *réduction d'un angle à l'horizon.* »

101. **Problème.** — *Étant donné l'angle* α *formé par deux droites concourantes et les angles* β *et* γ *qu'elles forment avec le plan horizontal, construire la projection horizontale du premier de ces angles.*

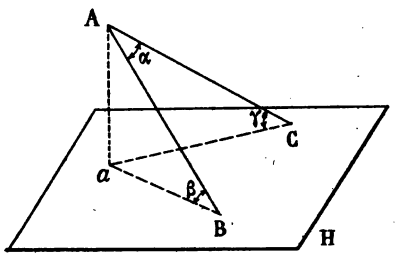


Fig. 51

Soient dans l'espace l'angle CAB et sa projection horizontale C*a*B (*fig.* 51) ; on remarquera que dans le trièdre d'arêtes A*a*, AB, AC, on connaît les trois faces

$$\widehat{CAB} = \alpha, \quad \widehat{CAa} = 90^\circ - \gamma,$$
$$\widehat{BAa} = 90^\circ - \beta,$$

et qu'on cherche à déterminer le rectiligne C*a*B du dièdre d'arête A*a*.

On est ramené aux problèmes traités aux numéros 96 et 98 ; nous allons en reprendre la solution en plaçant les données dans les positions qu'impose l'énoncé.

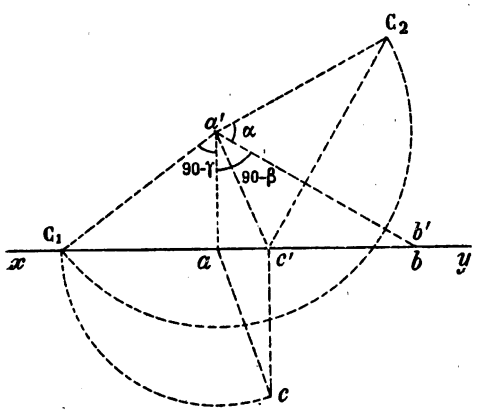


Fig. 52

Plaçons la face

$$\widehat{aAB} = 90^\circ - \beta$$

dans le plan vertical de projection, de façon que l'arête A*a* soit verticale. La face considérée se projette en vraie grandeur suivant l'angle *aa'b'* dont le côté *aa'* est perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 52). On rabat ensuite en $b'a'C_2$ et $aa'C_1$ sur le plan vertical les deux autres faces α et $90^\circ - \gamma$ autour des charnières *a'b'* et *a'a*. Puis, par la construction indiquée au n° 98, on prend sur les deux rabattements de la troisième arête deux longueurs égales $a'C_1 = a'C_2$; les perpendiculaires abaissées des points C_1 et C_2 sur les charnières correspondantes se coupent au point *c'*, projection verticale d'un point de la troisième arête.

Pour trouver la projection horizontale c de ce point, on remarque que la charnière aa' du rabattement de la face $90° - \gamma$ est verticale, le déplacement qui amène le point C_1 en (c, c') est donc une rotation autour de l'axe vertical aa'.

Un lieu géométrique de la projection horizontale c du point C est donc la circonférence qui a pour centre la trace horizontale a de l'axe de rotation et pour rayon aC_1 (31). Ce lieu coupe la ligne de rappel du point c' au point cherché c. L'angle réduit à l'horizon est ainsi obtenu en cab.

EXERCICES

1. Déterminer par un changement de plan horizontal l'angle de deux plans dont les traces verticales sont parallèles. (On rend les deux plans verticaux.)

2. Un plan est défini par ses traces et une droite par ses deux projections, la projection horizontale de la droite est perpendiculaire à la trace de même nom du plan. Trouver l'angle de la droite et du plan par un changement de plan vertical.

3. Construire les droites passant par un point donné et faisant avec la ligne de terre et une horizontale donnée des angles donnés. (La construction revient à celle d'un trièdre dont on connaît les trois faces.)

4. Construire les projections d'un trièdre dont on se donne une face située dans un plan horizontal et en outre :

1° soit les deux dièdres adjacents à cette face;

2° soit les pentes des deux autres faces;

3° soit une deuxième face et le dièdre qu'elle forme avec la face horizontale;

4° soit une deuxième face et le dièdre qui lui est opposé.

5. Trouver la projection verticale (ou la graduation) d'une droite dont on donne la projection horizontale sachant qu'elle fait des angles égaux avec deux droites données.

6. Construire les droites parallèles à un plan donné, rencontrant en outre deux droites données et faisant avec elles des angles égaux.

(*Baccalauréat.*)

7. Mener par un point donné les droites faisant avec deux droites données des angles égaux et orthogonales à une troisième droite.

8. On donne un point et trois droites. Mener par le point une droite faisant des angles égaux avec les trois droites.

9. Mener par un point donné les droites parallèles à un plan donné et faisant des angles égaux avec deux plans donnés.

10. Mener par une droite donnée les plans faisant des angles égaux avec deux plans donnés. (On démontre d'abord que les plans cherchés sont perpendiculaires à l'un des plans bissecteurs du dièdre formé par les deux plans donnés.)

11. Mener par un point donné les plans faisant des angles égaux avec trois plans donnés.

CHAPITRE VI

PROJECTION DU CERCLE

102. 1° On démontre en Géométrie que la projection orthogonale d'un cercle sur un plan P qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan du cercle est une ellipse ayant pour centre la projection du centre du cercle ; le grand axe et le petit axe de cette ellipse sont respectivement les projections du diamètre du cercle parallèle au plan de projection et du diamètre perpendiculaire au précédent. Il en résulte que la longueur du grand axe de l'ellipse est celle du diamètre de la circonférence projetée.

2° Si le plan du cercle est parallèle au plan de projection, la projection se fait alors en vraie grandeur suivant un cercle égal au cercle donné et qui a pour centre la projection du centre.

3° Si le plan du cercle est perpendiculaire au plan de projection, la projection se réduit à un segment de droite égal au diamètre (I, 9).

103. Problème. — *Soit à construire les projections du cercle situé dans le plan horizontal* H (*fig.* 53) *et dont le centre est le point* (o, o').

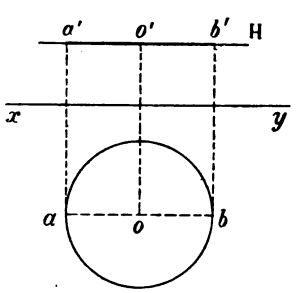


Fig. 53

La projection horizontale est le cercle de centre *o* et de même rayon que le cercle donné La projection verticale est le segment *a'b'*, projection verticale du diamètre (*ab*, *a'b'*) parallèle au plan vertical.

104. Tangente à la projection d'une courbe. — Théorème. — *La tangente en un point* M *d'une courbe* Γ *a pour projection sur un plan*

P *la tangente à la courbe* γ, *projection de* Γ *sur le même plan, au point m, projection de* M (*fig.* 54).

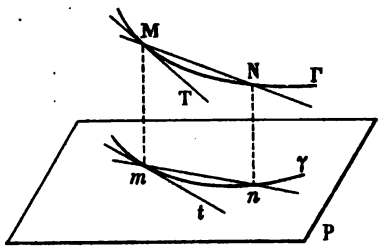


Fig. 54

Soient M et N deux points de la courbe Γ, *m* et *n* leurs projections sur le plan P ; la droite *mn* est la projection de MN. Si le point N se rapproche indéfiniment de M, le point *n* se rapproche également du point *m* ; les droites MN et *mn* ont pour positions limites les tangentes MT et *mt* aux courbes Γ et γ ; *mn* ne cessant pas d'être la projection de MN, *mt* est par suite la projection de MT.

Remarque. — Le théorème est *en défaut* si la droite MT est perpendiculaire au plan P, car sa projection se réduit alors à un point.

105. Problème. — *Déterminer les projections horizontale et verticale d'un cercle dont on connaît le plan, le centre et le rayon.*

Soit par exemple à trouver les projections d'un cercle de rayon donné R situé dans le plan PαQ défini par ses traces (*fig.* 55) et dont le centre se projette horizontalement en *o*.

Méthode. — *Pour obtenir des points et des tangentes sur chaque projection, on construit le rabattement du cercle sur un plan horizontal ou de front, on définit sur ce rabattement les points et les tangentes qu'on veut obtenir et on détermine ensuite leur relèvement.*

106. 1° Construction d'un rabattement du cercle. — Dans l'épure de la figure 55, nous avons d'abord déterminé la projection verticale *o'* du centre à l'aide de l'horizontale (*ra*, *r'a'*). Puis nous avons rabattu le plan du cercle sur le plan horizontal de projection ; le point (*a*, *a'*) se rabat en A_1 à l'intersection de la perpendiculaire à la charnière αP menée par le point *a* et du cercle de centre α et de rayon *αa'* (I, 183). L'horizontale du centre (*o*, *o'*) a pour rabattement la parallèle A_1R_1 menée à la charnière αP par le point A_1 ; le rabattement du centre est au point d'intersection O_1 de cette droite et de la perpendiculaire menée de *o* à la charnière αP.

En traçant une circonférence de centre O_1 avec le rayon donné, on

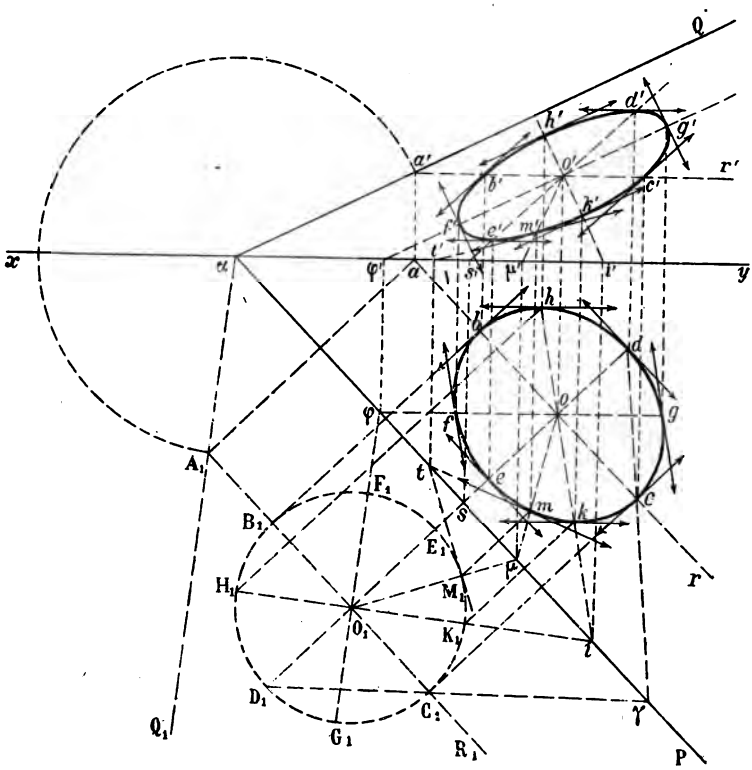


Fig. 55

obtient le rabattement du cercle donné sur le plan horizontal de projection.

107. 2° **Détermination des axes de la projection horizontale.** — Des propriétés rappelées (102, 1°) il résulte que la projection horizontale de la circonférence donnée est une ellipse ayant pour centre le point o, pour axes les projections horizontales du diamètre horizontal de cette circonférence et du diamètre perpendiculaire à celui-ci.

Or, le diamètre horizontal (rabattu suivant le diamètre B_1C_1 de la circonférence O_1 parallèle à αP) se projette horizontalement en vraie

grandeur sur la projection horizontale *or* de l'horizontale du point (*o*, *o'*). On obtient ses extrémités *b* et *c* en portant de part et d'autre du point *o* des longueurs égales au rayon R de la circonférence.

Quant au diamètre perpendiculaire au diamètre horizontal, il est rabattu suivant le diamètre $D_1O_1E_1$ de la circonférence O_1, porté par la droite oO_1. Ses extrémités s'obtiennent donc en relevant les points D_1 et E_1. Nous avons relevé le point D_1 en utilisant la droite D_1C_1 qui rencontre la charnière en γ et se relève horizontalement suivant γc ; le point *d* où γc rencontre oO_1 est l'un des sommets du petit axe de la projection horizontale ; l'autre sommet de ce petit axe est le point *e*, symétrique de *d* par rapport au point *o*.

108. 3° **Détermination des axes de la projection verticale.** — Le diamètre de front du cercle, dont la projection verticale donne le grand axe de l'ellipse projection verticale du cercle (102, 1°) est rabattu en F_1G_1 sur la parallèle $G_1\varphi$ menée par O_1 au rabattement αQ_1 de la trace verticale du plan ; le rabattement du diamètre perpendiculaire à F_1G_1, dont la projection verticale donne le petit axe de l'ellipse, a été tracé en H_1K_1.

Les projections verticales des points rabattus en F_1 et G_1 s'obtiennent en portant sur la projection verticale $o'\varphi'$ de la frontale du point (*o*, *o'*) des longueurs *o'f'* et *o'g'* égales au rayon du cercle, car le diamètre (*fg*, *f'g'*) est de front et se projette par suite en vraie grandeur sur le plan vertical.

Pour relever les points rabattus en H_1 et K_1, on remarque que la droite O_1i qui contient ces points se projette horizontalement suivant *oi* ; on obtient facilement sa projection verticale en *o'i'*. Les perpendiculaires à la charnière menées par H_1 et K_1 rencontrent *oi* aux points *h* et *k* projections horizontales des points cherchés, qui se rappellent en *h'* et *k'* sur *o'i'*. Les points *h'* et *k'* sont les sommets du petit axe de la projection verticale.

109. Remarques. I. — Les points *b* et *c* se rappellent en *b'* et *c'* sur la projection verticale *a'r'* de l'horizontale du centre ; de même, les points *d* et *e* se rappellent en *d'* et *e'* sur la projection verticale *s'o'* de la droite du plan projetée horizontalement en *so*. On obtient ainsi quatre points de l'ellipse projection verticale. On construit les tangentes à cette projection aux points considérés en cherchant la projection verticale des droites du plan $P\alpha Q$ projetées horizontalement

suivant les tangentes aux sommets b, c, d, e, de l'ellipse. Les tangentes au cercle en (e, e'), (d, d') sont horizontales, donc les tangentes à la projection verticale aux points e' et d' sont parallèles à la ligne de terre : (e, e') est le point le plus bas du cercle, (d, d') en est le point le plus haut.

De même, les tangentes en (c,c') et (b,b') sont parallèles à la droite $(de, d'e')$, car les projections horizontales de ces trois droites sont parallèles, donc les tangentes à la projection verticale aux points b' et c' sont parallèles à la droite $d'e'$.

110. II. — Les sommets f' et g' de la projection verticale se rappellent horizontalement en f et g sur la projection horizontale $o\varphi$ de la frontale du centre. Les tangentes au cercle aux points (f, f') et (g, g') sont parallèles à la droite $(hk, h'k')$, car ces droites appartiennent toutes trois au plan $P\alpha Q$ et leurs projections verticales sont parallèles ; par suite, les tangentes à la projection horizontale aux points f et g sont parallèles à la droite hk.

III. — On a ainsi déterminé sur chaque ellipse huit points et les tangentes en ces points, ce qui est suffisant, *au point de vue graphique*, pour tracer chacune de ces courbes avec exactitude.

111. 4° Construction d'un point quelconque et de la tangente en ce point. — On prend sur le rabattement du cercle un point quelconque M_1, et on construit la tangente M_1t en ce point. Il reste à trouver les relèvements du point et de la tangente.

Pour cela, on utilise le relèvement du centre ; on détermine d'abord le point μ où la droite O_1M_1 rencontre la charnière et on mène ensuite la droite $o\mu$ qui rencontre la perpendiculaire abaissée de M_1 sur la charnière au point m, projection horizontale du point cherché. En projection verticale, le point μ se rappelle en μ' sur la ligne de terre et le point m en m' sur la droite $m'o'$.

Le relèvement de la tangente s'obtient de même en $(mt, m't')$, car le point (t, t') situé sur la charnière reste fixe dans le relèvement.

112. Remarque. — La méthode précédente (105) s'applique également aux problèmes suivants :

1° *Trouver les points d'intersection d'une circonférence et d'une droite de son plan* ;

2° *Mener à une circonférence les tangentes par un point de son plan ou parallèlement à une direction de son plan.*

On effectue d'abord un rabattement du plan de la circonférence sur un plan horizontal ou de front ; il est alors facile de réaliser dans le rabattement les constructions proposées, puisque le cercle se rabat en vraie grandeur ; il reste à construire les relèvements des points et des droites qu'on a obtenus.

On trouvera dans le problème suivant (4° et 5°) des applications de cette remarque.

113. Problème. — *Construire la projection horizontale d'un cercle défini par son plan, son centre et son rayon.* (*Géométrie cotée*).

Soient P le plan du cercle défini par une échelle de pente, $o(2)$ son centre et R son rayon (*fig.* 56).

1° **Détermination d'un rabattement du cercle.** — Rabattons le plan P sur le plan horizontal de cote 2 ; la charnière est l'horizontale $d(2)o(2)$ passant par le centre du cercle. Dans le rabattement le centre est un point qui reste fixe ; il en résulte qu'après le rabattement le cercle donné se projette en vraie grandeur suivant le cercle de centre o et de rayon R.

2° **Détermination des axes de l'ellipse projection.** — Le diamètre horizontal du cercle dirigé suivant la charnière reste invariable pendant le rabattement ; sa projection aa' est donc la projection du diamètre du cercle rabattu qui est dirigé suivant la projection do de la charnière et, d'après ce que nous avons dit plus haut (102, 1°), aa' est aussi, en grandeur et position, le grand axe de l'ellipse projection.

Quant aux sommets du petit axe, on les obtient en relevant les extrémités du diamètre $b_1b'_1$ perpendiculaire à aa' dans le cercle rabattu. Pour relever le point b_1, nous avons d'abord construit le triangle de rabattement def du point $e(3)$ de l'échelle de pente P du plan et nous en avons déduit le relèvement b du point b_1, en construisant le triangle de rabattement bob_2 de ce point. Pour relever ensuite le point b'_1, il suffit de prendre le symétrique b' de b par rapport au centre o ; les sommets du petit axe de l'ellipse sont alors b et b' et les cotes des points du cercle donné projetés en ces points sont respectivement $2 + bb_2$ et $2 - bb_2$.

3° Détermination d'un point quelconque et de la tangente en ce point. — Soit, par exemple, à déterminer la projection du point M du cercle, qui après le rabattement du plan P se trouve projeté

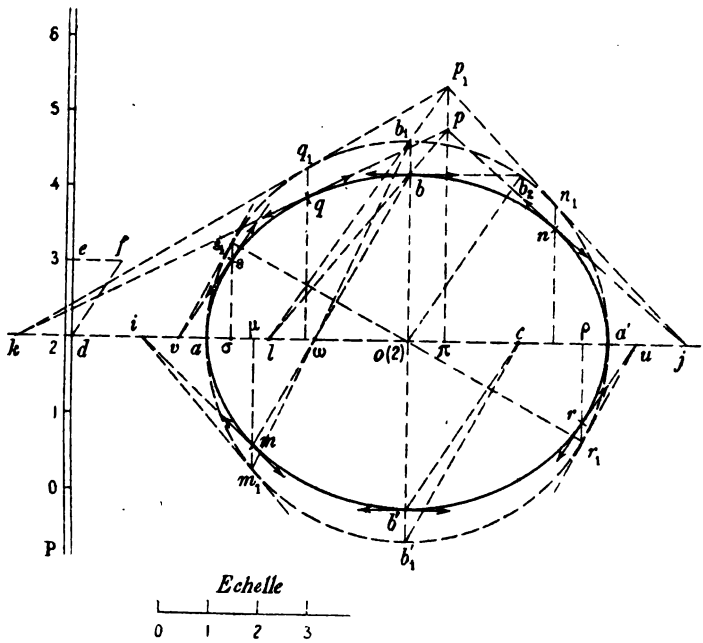


Fig. 56

en m_1. Pour relever ce point, on peut utiliser le relèvement du point b_1 ; on détermine d'abord le point ω où la droite b_1m_1 rencontre la projection do de la charnière et on mène ensuite la droite $b\omega$ qui rencontre la perpendiculaire $m_1\mu$ à la charnière do au point cherché m.

La tangente au cercle au point M se projette, après le rabattement du plan P, suivant la tangente m_1i au cercle rabattu ; elle rencontre la charnière au point I, projeté en i, d'où il suit que sa projection est mi ; la droite mi est donc la tangente à l'ellipse au point m.

4° Mener à la circonférence les tangentes issues d'un point donné dans son plan. — Soit à mener au cercle les tangentes issues du point de son plan projeté en p. Nous avons d'abord déterminé le rabattement p_1 de ce point en utilisant encore le rabattement du

point b. Les deux tangentes cherchées sont alors rabattues suivant les tangentes p_1j et p_1k menées par le point p_1 au cercle rabattu et leurs projections horizontales sont pj et pk. Les points de contact, rabattus en n_1 et q_1, se relèvent aux points n et q qui sont les points de contact avec l'ellipse des tangentes pj et pk.

5° **Mener à la circonférence les tangentes parallèles à une direction donnée dans son plan.** — Soit à mener au cercle les tangentes parallèles à la droite du plan P dont la projection est $b'c$; on voit de suite que le rabattement de cette droite est b'_1c, de sorte que les tangentes cherchées sont rabattues suivant les tangentes ur_1 et vs_1, menées au cercle rabattu parallèlement à b'_1c ; leurs projections sont donc les droites ur et vs menées par les points u et v parallèlement à $b'c$; leurs points de contact, rabattus en r_1 et s_1, se relèvent aux points r et s communs aux perpendiculaires $r_1\rho$ et $s_1\sigma$ à la charnière et aux tangentes qu'on vient de déterminer.

114. Procédés graphiques permettant d'obtenir rapidement un grand nombre de points d'une ellipse définie par ses axes. — Ayant déterminé, comme nous l'avons expliqué plus haut, les axes de la projection (horizontale ou verticale) d'une circonférence donnée, on peut utiliser telle construction géométrique que l'on voudra pour déterminer de nouveaux points de la courbe.

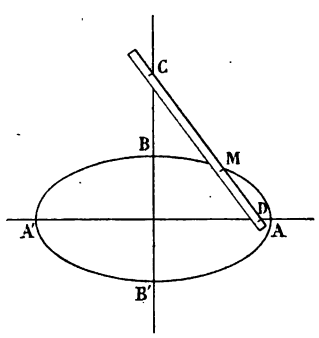


Fig. 57

1° Par exemple, la connaissance des axes permet de déterminer aisément les foyers. En considérant ensuite l'ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances aux foyers est constante, on peut, avec le compas seulement, déterminer autant de points de la courbe que l'on voudra (Voir Grévy, *Compléments de géométrie*, 621).

2° On peut aussi considérer l'ellipse comme le lieu d'un point situé sur un segment de longueur invariable dont les extrémités se déplacent sur deux droites fixes rectangulaires.

Pour faire servir cette propriété à la détermination des points d'une ellipse dont les axes sont, en grandeur et position, AA' et BB'

(*fig.* 57), on porte bout à bout sur le bord d'une bande de papier des longueurs CM et MD respectivement égales au demi-grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse. On promène ensuite cette bande de papier sur l'épure en ayant soin que le point D reste sur la droite AA', le point C sur la droite BB' : on marque alors au crayon la position occupée par le point M et l'on a ainsi autant de points de l'ellipse qu'on le désire.

EXERCICES

1. On donne dans un plan P deux points O et A ; construire les projections de l'hexagone régulier du plan P qui a pour centre le point O, et dont l'un des sommets est le point A.

2. On donne un cercle défini par son plan, son centre et son rayon ; mener dans ce cercle une corde de longueur donnée passant par un point donné dans son plan.

3. Déterminer la projection d'une droite située dans un plan P et sur laquelle deux cercles de ce plan, définis par leurs centres et leurs rayons, interceptent des cordes de longueurs données.

4. Construire les projections des centres d'homothétie et de l'axe radical de deux cercles situés dans un plan donné P, chacun d'eux étant défini par son centre et son rayon.

5. Mener à la circonférence circonscrite à un triangle défini par les projections cotées de ses sommets des tangentes de pente donnée.

6. Sur une circonférence définie par son plan, son centre et son rayon trouver les points dont la cote est égale à la moitié de l'éloignement. (*Baccalauréat*).

7. On donne sur une épure un point (a, a'), une droite (bc, $b'c'$) et une circonférence définie par son plan, son centre et son rayon. Construire les droites passant par le point (a, a') et rencontrant la droite et la circonférence données qui ne sont pas dans un même plan. (*Saint-Cyr*).

8. Construire les droites parallèles à une direction donnée rencontrant une droite et une circonférence données non situées dans un même plan. (*Saint-Cyr*).

9. Construire les projections d'un cercle connaissant :
1° son centre (o, o') ;

2° la direction du grand axe de la projection horizontale ;
3° les projections horizontales d'un de ses points et de la tangente en ce point. (*Navale.*)

10. Construire les projections d'un cercle connaissant :
1° son centre (o, o') ;
2° la direction du petit axe de chaque projection ;
3° une tangente à la projection verticale.
(*Navale.*)

11. On donne une circonférence et un plan. Construire le point de la circonférence le plus rapproché du plan.
(*Saint-Cyr.*)

12. Mener deux plans perpendiculaires qui passent l'un par un point donné A, l'autre par un point donné B et dont l'intersection ait une direction donnée et rencontre la ligne de terre. (*Navale.*)

13. On donne un point (a, a') sur la ligne de terre, un point (b, b') du plan vertical, un point (c, c') du plan horizontal. Construire les projections des cercles inscrit et circonscrit au triangle formé par ces trois points. (*Saint-Cyr.*)

14. On donne deux droites concourantes dont l'une est horizontale. Construire les projections des cercles tangents à l'horizontale et passant par deux points donnés sur la seconde droite.
(*Saint-Cyr.*)

15. Construire les projections d'un carré dont on donne deux sommets consécutifs (a, a') et (b, b') ; on sait en outre qu'un autre sommet se trouve dans un plan donné.
(*Saint-Cyr.*)

16. Construire le maximum et le minimum de la distance d'un point (o, o') à un point mobile sur la circonférence passant par trois points donnés (a, a'), (b, b') et (c, c'). (*Saint-Cyr.*)

17. On donne une ellipse projection horizontale d'une circonférence de l'espace ; construire la projection verticale de la circonférence, connaissant en outre la projection verticale de son centre.
(*Navale.*)

18. Dans un plan défini par une horizontale et une frontale concourantes en un point (o, o'), on considère une circonférence de centre (o, o') et de rayon donné. Déterminer les projections des points de la circonférence où la tangente fait un angle de 45° avec le plan horizontal.

19. Construire les projections d'un triangle équilatéral ABC, connaissant les projections (a, a') d'un sommet, l'angle de AB avec la ligne de terre, le plan de profil qui passe par C et sachant en outre que le sommet B est sur la ligne de terre.
(*Navale.*)

CHAPITRE VII

LA SPHÈRE

§ 1.

Rappel des propriétés géométriques de la sphère.

115. Nous rappellerons d'abord les principales propriétés géométriques de la sphère dont on trouvera une étude complète dans les traités de géométrie.

1° La sphère est le lieu géométrique des points de l'espace également distants d'un point fixe appelé centre.

2° Un plan quelconque coupe généralement la surface d'une sphère suivant un cercle dont le centre est la projection du centre de la sphère sur le plan sécant. Si le plan sécant ne passe pas par le centre de la sphère, le cercle d'intersection se nomme un *petit cercle ;* si le plan sécant passe par le centre de la sphère, la section se nomme un *grand cercle.*

3° La sphère peut être considérée comme la surface de révolution engendrée par la rotation d'un grand cercle *quelconque* tournant autour de l'un *quelconque* de ses diamètres.

4° Le *plan tangent* en un point quelconque de la sphère est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de contact ; ce plan est le lieu géométrique des tangentes à toutes les courbes tracées sur la sphère et passant par le point de contact.

5° Une droite coupe généralement une sphère en deux points.

Toute droite qui ne rencontre la sphère qu'en un seul point est dite *tangente* en ce point à la sphère ; elle est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de contact.

6° Tous les plans tangents à une sphère O (*fig.* 58) le long d'un petit cercle (C) passent par un même point S extérieur à la sphère ; ils sont en même temps tangents à un cône de révolution de sommet S ayant pour axe la droite SO joignant le point S au centre O de la sphère. Ce cône est dit *circonscrit à la sphère* le long du petit cercle (C).

Réciproquement, tout point S extérieur à une sphère O est le

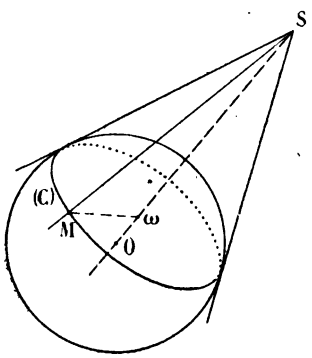


Fig. 58

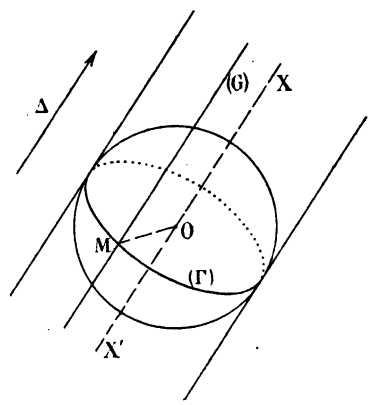


Fig. 59

sommet d'un cône de révolution circonscrit à cette sphère le long d'un petit cercle (C) nommé *cercle de contact* du cône et de la sphère. En tout point M du cercle (C), la sphère et le cône ont même plan tangent. Le plan du cercle de contact est perpendiculaire à l'axe SO du cône. Ce cercle est le lieu des points de contact M avec la sphère des tangentes SM menées par le point S.

7° Tous les plans tangents à une sphère O le long d'un grand cercle (Γ) (*fig.* 59) étant perpendiculaires au plan de ce grand cercle sont parallèles à une même direction ; ils sont en même temps tangents à un cylindre de révolution ayant pour axe la perpendiculaire menée par le centre de la sphère sur le plan du grand cercle (Γ). Ce cylindre est dit *circonscrit à la sphère* le long du grand cercle (Γ).

Réciproquement, il existe un cylindre de révolution circonscrit à la sphère dont les génératrices (G) sont parallèles à une direction donnée arbitrairement Δ.

L'axe du cylindre est le diamètre X'X de la sphère parallèle à Δ.

La courbe de contact de ce cylindre et de la sphère est le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à Δ ; ce qui veut dire qu'en tout point M de ce grand cercle la sphère et le cylindre ont même plan tangent. Ce grand cercle est le lieu des points de contact M avec la sphère des tangentes qu'on peut lui mener parallèlement à Δ.

Ajoutons qu'un cône circonscrit à la sphère devient à la limite un cylindre circonscrit si son sommet S s'éloigne à l'infini dans une direction Δ.

§ II.

Représentation de la sphère.

116. Contour apparent par rapport à un plan et contour apparent en projection. — Supposons qu'on fasse la projection

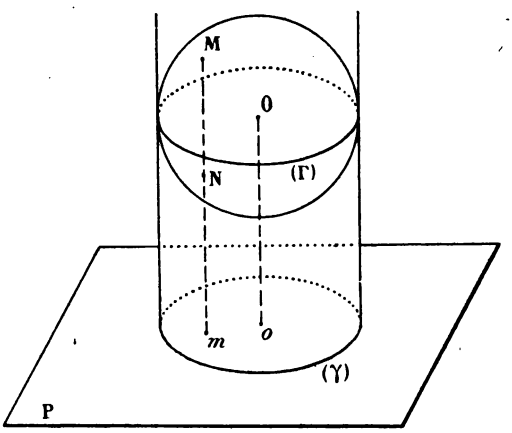


Fig. 60

d'une sphère O sur un plan P (*fig.* 60). Soit (Γ) le grand cercle de la sphère parallèle au plan P ; sa projection (γ) est un autre cercle égal à (Γ). Le grand cercle (Γ) est le cercle de contact du cylindre circonscrit à la sphère dont les génératrices sont perpendiculaires au plan P, ou encore *le lieu des points de la sphère où le plan tangent est perpendiculaire à* P. Considérons un point quelconque M de la surface de la sphère ; la projetante M*m* de ce point est évidemment con-

tenue à l'intérieur du cylindre circonscrit le long de (Γ) et par suite sa projection *m* est à l'intérieur du cercle (γ). Le cercle (γ) se nomme le *contour apparent de la sphère en projection* sur le plan P ; le cercle (Γ) projeté suivant (γ) se nomme le *contour apparent de la sphère dans l'espace* par rapport au plan P.

117. Pour un observateur s'éloignant à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan P la sphère apparait comme un disque circulaire limité par le cercle Γ ; d'où le nom de contour apparent donné à ce cercle. Tous les rayons visuels de l'observateur rencontrant la surface de la sphère sont contenus à l'intérieur du cylindre circonscrit le long du grand cercle ; de plus, le cercle (Γ) partage la sphère en deux hémisphères dont un seul est vu par l'observateur. Il est clair d'ailleurs, que le contour apparent (Γ) est lui-même vu en entier.

118. Propriété du contour apparent. Théorème. — *Si une courbe* (C) *tracée sur la surface d'une sphère rencontre au point* M *le*

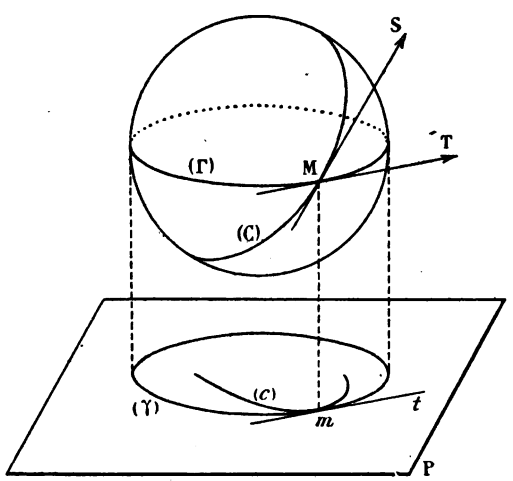


Fig. 61

contour apparent (Γ) *de cette sphère par rapport à un plan* P (*fig.* 61), *les projections* (*c*) *et* (γ) *sur le plan* P *des courbes* (C) *et* (Γ) *sont tangentes au point m projection de* M.

En effet, les tangentes MT et MS aux courbes (Γ) et (C) au point M sont toutes deux dans le plan tangent à la sphère au point M (115, 4°). Ce plan tangent est d'ailleurs perpendiculaire au plan P, puisque M est sur le contour apparent de la sphère par rapport au plan P (116). Par suite, les projections de ces deux tangentes sur le plan P sont confondues suivant la trace *mt* sur ce plan du plan tangent en M, et comme ces projections sont les tangentes en *m* aux courbes projections (*c*) et (γ) (104), ces deux courbes ont même tangente *mt* au point *m*, c'est-à-dire sont tangentes en ce point.

Remarque. — La démonstration précédente n'utilise pas les propriétés particulières de la sphère ; elle subsiste donc pour une surface quelconque si on définit le contour apparent de cette surface par rapport au plan P comme le lieu des points de la surface où le plan tangent est perpendiculaire au plan P.

119. En *Géométrie cotée*, on ne considère qu'une seule projection des corps sur un plan horizontal. Le contour apparent d'une sphère par rapport au plan de projection se nomme alors *contour apparent horizontal* ; c'est, d'après ce que nous avons dit plus haut, le grand cercle situé dans le plan horizontal du centre de la sphère ou, comme on dit plus brièvement, le grand cercle horizontal de la sphère.

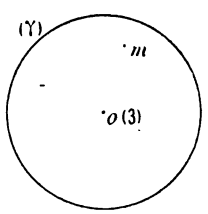


Fig. 62

La position et la grandeur de la sphère sont d'ailleurs parfaitement déterminées si l'on se donne la projection du contour apparent horizontal et la cote du centre de la sphère. Ainsi, la figure 62 est l'épure d'une sphère dont le centre est le point projeté en *o*, ayant pour cote 3, et dont le rayon est égal à celui du cercle (γ).

Tout point M de la surface de la sphère se projette en *m* à l'intérieur du cercle (γ) (116).

120. En *Géométrie descriptive*, il faut considérer à la fois les contours apparents sur les deux plans de projection.

Le *contour apparent horizontal* d'une sphère est encore le grand cercle situé dans le plan horizontal du centre de la sphère ; de même, le *contour apparent vertical* est le grand cercle situé dans le plan de front passant par le centre.

La sphère est parfaitement déterminée en grandeur et position lorsqu'on se donne la *projection horizontale du contour apparent horizontal* et la *projection verticale du contour apparent vertical.*

Ces deux projections sont évidemment des cercles ayant même rayon, celui de la sphère, et leurs centres doivent se trouver sur une même ligne de rappel, puisqu'ils sont les deux projections du centre de la sphère.

Ainsi la figure 63 représente une sphère ayant pour centre le point (o, o') et pour rayon le rayon commun aux cercles égaux C et C'_1.

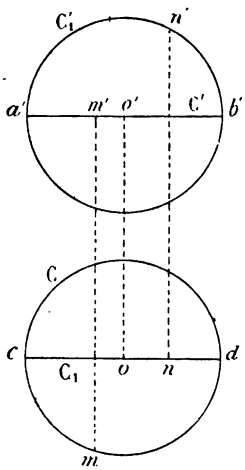


Fig. 63

Le contour apparent horizontal de la sphère est le grand cercle dont la projection horizontale est C ; sa projection verticale est le diamètre $a'b'$ du cercle C'_1 perpendiculaire aux lignes de rappel (ou parallèle à la ligne de terre, s'il y en a une) (103). De même, le contour apparent vertical est le grand cercle dont la projection verticale est C'_1 et dont la projection horizontale est le diamètre cd du cercle C perpendiculaire à oo'. Ainsi (m, m') est un point situé sur le contour apparent horizontal dans l'espace ; (n, n') est un point situé sur le contour apparent vertical dans l'espace. Nous insistons sur cette distinction nécessaire entre les deux contours apparents parce que, trop souvent, les débutants considèrent les cercles C et C'_1 comme les projections d'un même contour apparent, ce qui est absurde.

Tout point de la sphère a sa projection horizontale à l'intérieur de C et sa projection verticale à l'intérieur de C'_1.

121. Problème. — *Passer de la représentation d'une sphère en Géométrie cotée à sa représentation dans un système de deux plans de projection et réciproquement.*

Soit $o(5)$ le centre d'une sphère dont le contour apparent horizontal a pour projection un cercle donné C (*fig.* 64). Considérons un plan vertical quelconque xy et proposons-nous de chercher la repré-

sentation de cette même sphère dans le système de projections défini par le plan horizontal de cote 1 et par le plan vertical xy.

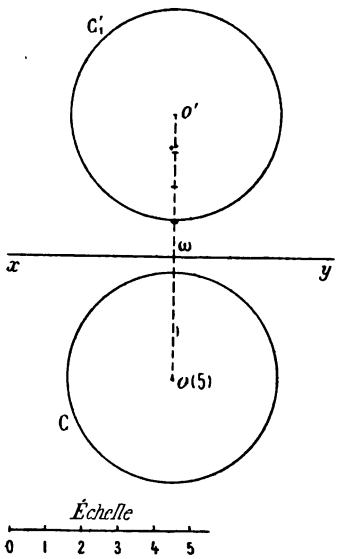


Fig. 64

D'abord, la projection verticale du centre est le point o' situé sur la perpendiculaire abaissée de o sur la ligne de terre xy, à une distance $\omega o'$ de celle-ci égale à $5 - 1 = 4$ unités de l'échelle. Quant au contour apparent vertical, sa projection verticale est le cercle C'_1 égal au cercle C et de centre o'.

122. *Réciproquement*, considérons la sphère dont le centre est le point (o, o') et dont les contours apparents par rapport aux deux plans de projection sont respectivement projetés sur ces plans suivant les cercles égaux C et C'_1 (*fig.* 64). Pour avoir la représentation de cette sphère dans un système de plans cotés, le plan de comparaison étant par exemple le plan horizontal dont la cote est -1, mesurons à l'échelle du dessin la distance $\omega o'$ à la ligne de terre de la projection verticale o' du centre de la sphère. Approximativement, cette distance est égale à 4 unités. Donc la cote du centre, par rapport au plan de comparaison choisi est $4 + 1 = 5$ unités. Il suffit alors d'écrire le chiffre 5 à côté de la lettre o représentant la projection horizontale du centre et de négliger la ligne de terre et la projection verticale.

123. Problème. — *Une sphère étant représentée dans un système de deux plans de projection donnés, représenter cette sphère après avoir changé l'un des plans de projection.*

Soit par exemple une sphère de centre (o, o') (*fig.* 65) représentée dans un système xy, les contours apparents sur les plans de projection étant projetés respectivement sur ces plans suivant les cercles égaux C et C'_1. Effectuons un changement de plan vertical en pre-

nant comme nouveau plan vertical de projection celui dont la trace horizontale dans le premier système est x_1y_1.

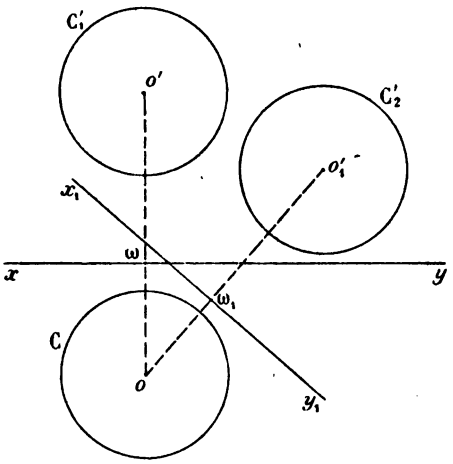


Fig. 65

La nouvelle projection verticale du centre de la sphère est le point o'_1 situé sur la perpendiculaire menée de o sur x_1y_1, à une distance $\omega_1 o'_1$ égale à la distance $\omega o'$ de l'ancienne projection verticale du même point à la première ligne de terre xy (I, 236). Quant au nouveau contour apparent vertical, sa projection verticale est le cercle C'_2 de centre o'_1 et de rayon égal à celui du cercle C.

Les deux cercles C et C'_2 constituent la représentation de la sphère dans le système x_1y_1.

§ III.

Parallèles horizontaux. Parallèles de front. Détermination d'un point de la sphère.

124. On appelle *parallèles horizontaux* d'une sphère les cercles de cette sphère situés dans des plans horizontaux. De même, on nomme *parallèles de front* les cercles situés dans des plans de front. Tout *parallèle horizontal* se projette horizontalement en vraie grandeur suivant un cercle concentrique à la projection horizontale du contour apparent horizontal et verticalement suivant une portion de droite perpendiculaire à la direction des lignes de rappel (102, 2° et 3°). En effet, le centre de ce parallèle se trouve sur la verticale du centre de la sphère (115, 2°) et par suite les projections horizontales de ces deux points sont confondues.

125. Par exemple, dans la sphère de centre (o, o') représentée dans l'épure de la figure 66, proposons-nous de déterminer le *parallèle horizontal* intersection de la sphère par le plan horizontal H'. La trace verticale de ce plan rencontre la projection verticale du grand cercle de contour apparent vertical en deux points a' et b' ; en rappelant ces points en a et b sur la projection horizontale C_1 du même contour apparent, nous avons les deux points (a, a') et (b, b') où le plan vertical H' rencontre le grand cercle (C_1, C_1') ; les projections de même nom de ces deux points sont d'ailleurs symétriques par rapport à la ligne de rappel oo'. Le parallèle cherché passe évidemment par les deux points (a, a'), (b, b') ; et comme nous savons (124) que sa projection horizontale est concentrique à la projection horizontale C du contour apparent horizontal, il en résulte que les projections de ce parallèle sont, d'une part, le cercle de centre o et de rayon oa (ou ob), d'autre part, le segment $a'b'$ de la droite H' compris à l'intérieur du cercle C_1'.

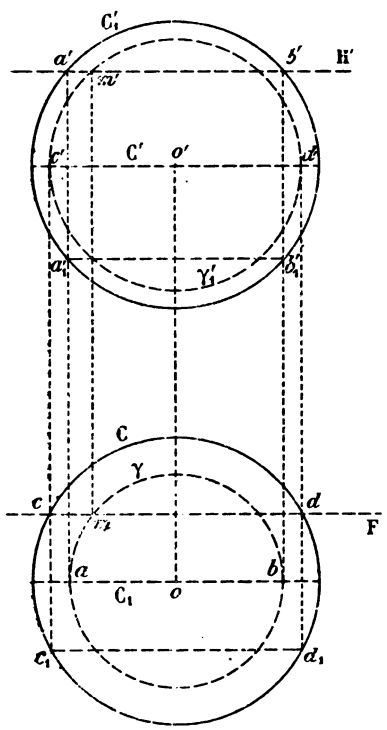


Fig. 66

126. Nous pourrions, au lieu de nous donner la trace verticale du plan du parallèle cherché, nous proposer de trouver sa projection verticale, connaissant sa projection horizontale. Cette projection horizontale est nécessairement (124) un cercle γ concentrique à la projection horizontale C du contour apparent horizontal et contenu tout entier à l'intérieur de C (116). On remarque alors que les points a et b où le cercle γ rencontre le segment C_1, projection horizontale du contour apparent vertical, sont les projections horizon-

tales des deux points où le parallèle cherché rencontre sur la sphère ce même contour apparent ; les projections verticales de ces points sont donc à l'intersection des lignes de rappel des points a et b avec le cercle C'_1, projection verticale du contour apparent vertical. Or ces lignes de rappel rencontrent le cercle C'_1 en quatre points a', a'_1, b', b'_1 deux à deux symétriques par rapport à oo' et deux à deux symétriques également par rapport à la droite C', projection verticale du contour apparent horizontal. Il en résulte qu'il existe deux parallèles horizontaux de la sphère projetés horizontalement suivant le cercle γ et que les projections verticales de ces parallèles sont les segments $a'b'$ et $a'_1b'_1$. Les deux parallèles ainsi obtenus sont symétriques par rapport au plan du contour apparent horizontal.

127. De même, cherchons à déterminer le *parallèle de front* situé dans le plan de front F. Par un raisonnement en tous points analogue à celui que nous avons fait au n° 125, nous remarquons que les points c et d où la trace horizontale F du plan de front donné rencontre la projection horizontale C du contour apparent horizontal sont les projections horizontales des deux points où le parallèle demandé rencontre ce même contour apparent. Relevons alors ces points en c' et d' sur la projection verticale C' du contour apparent horizontal et nous avons en (c, c'), (d, d') les deux points de rencontre du parallèle et du cercle (C, C'). Ce parallèle de front a comme projection verticale un cercle concentrique à C'_1 ; il en résulte que ses projections sont respectivement le segment cd et le cercle de centre o' et de rayon $o'c'$ (ou $o'd'$).

128. Pareillement, proposons-nous de déterminer la projection horizontale d'un parallèle de front, connaissant sa projection verticale. Cette projection verticale donnée doit être un cercle γ'_1 concentrique à C'_1 et de rayon inférieur au rayon de la sphère (116). Le cercle γ'_1 coupe le segment C', projection verticale du contour apparent horizontal, en deux points c' et d' ; les lignes de rappel de ces points rencontrent à leur tour la projection horizontale C du contour apparent horizontal en quatre points c, c_1, d, d_1 symétriques deux à deux par rapport à oo' et par rapport au segment C_1, projection horizontale du contour apparent vertical. Par suite, il existe deux parallèles de front, symétriques par rapport au plan du contour apparent vertical, dont les projections verticales coïncident

avec le cercle donné γ'_1 : ces deux parallèles ont respectivement pour projection horizontale les segments cd et c_1d_1 (102, 3°).

129. Dans les problèmes relatifs à la sphère, les parallèles horizontaux et de front sont d'une très grande utilité ; ils jouent sur la sphère le même rôle que les horizontales et les droites de front dans un plan.

Deux cercles tracés sur une même sphère se rencontrant généralement en deux points, un parallèle horizontal et un parallèle de front se coupent aussi généralement en deux points. En outre, il est évident que par un point quelconque (m, m') d'une sphère (*fig.* 66) passent un parallèle horizontal et un parallèle de front.

130. En *Géométrie cotée*, comme il n'y a plus de plan de projection vertical, les seuls parallèles intéressants sont les *parallèles horizontaux*, lieux des points de la sphère ayant la même cote. Chacun d'eux est déterminé par sa cote ou par sa projection horizontale, qui est un cercle concentrique à la projection du contour apparent horizontal de la sphère. Nous aurons l'occasion d'employer très fréquemment ces parallèles horizontaux.

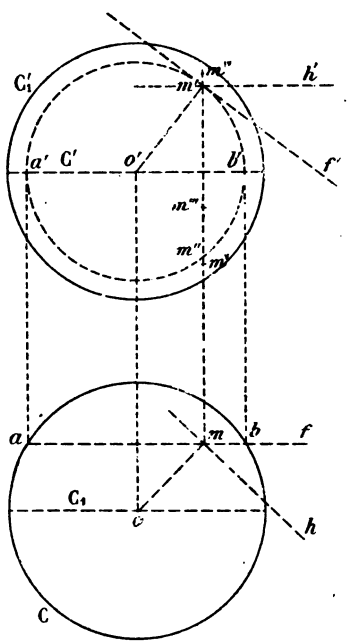


Fig. 67

131. Problème. — 1° *Connaissant l'une des projections d'un point d'une sphère, déterminer l'autre projection.* 2° *Déterminer le plan tangent à la sphère en ce point.* — Soit à déterminer la projection verticale du point de la sphère (o, o') (*fig.* 67), dont la projection horizontale est m. Par le point cherché passent, comme nous l'avons vu plus haut, un parallèle horizontal et un parallèle de front (129). Le parallèle de front, par exemple, a pour projection horizontale le segment ab mené par m perpendiculairement à oo' et limité à la projection ho-

rizontale C du contour apparent horizontal. Il rencontre ce dernier contour en deux points projetés horizontalement en a et b et verticalement en a' et b' sur C', projection verticale du contour apparent horizontal. Donc, le parallèle de front considéré se projette verticalement suivant le cercle de centre o' et de rayon $o'a'$ (ou $o'b'$). La projection verticale du point cherché est alors à l'intersection de ce cercle et de la ligne de rappel du point m. Cette ligne de rappel et ce cercle se rencontrent en deux points m', m'' ; par suite, il existe deux points de la surface de la sphère projetés horizontalement en m, les points (m, m'), (m, m''). Ces deux points sont d'ailleurs symétriques par rapport au plan du contour apparent horizontal de la sphère.

132. *Plan tangent au point* (m, m'). — Le plan tangent à la sphère au point (m, m') est perpendiculaire au rayon $(om, o'm')$ aboutissant en ce point. En menant mh perpendiculaire à om et $m'f'$ perpendiculaire à $o'm'$, on a immédiatement une horizontale $(mh, m'h')$ et une frontale $(mf, m'f')$ de ce plan, qui se trouve ainsi complètement déterminé.

133. Remarques. I. — On aurait pu résoudre le problème précédent (131) en utilisant le parallèle horizontal du point donné m (126) ; la projection verticale de ce parallèle qu'il est facile d'obtenir détermine le point cherché m' par son intersection avec la ligne de rappel du point m.

II. — Dans le cas où l'on se donne la projection verticale m' d'un point de la sphère, la même méthode permet de déterminer sa projection horizontale m.

134. Problème (*Géométrie cotée*). — 1° *Déterminer la cote d'un point d'une sphère donnée, connaissant sa projection horizontale.* 2° *Déterminer le plan tangent à la sphère en ce point.*

1° Soit, par exemple, à déterminer la cote du point projeté horizontalement en m et situé dans la sphère ayant pour centre le point $o(3)$ et dont le contour apparent horizontal est projeté suivant le cercle C (*fig.* 68 et 69).

Considérons un plan vertical auxiliaire xy parallèle à om (*fig.* 68). Dans le système de deux plans de projection défini par le plan de comparaison et le plan vertical ainsi choisi, le centre de la sphère se projette verticalement en o' sur la ligne de rappel du point o, à

3 unités de l'échelle au-dessus de xy. Le contour apparent vertical de la sphère a donc pour projection verticale le cercle C'_1 de centre

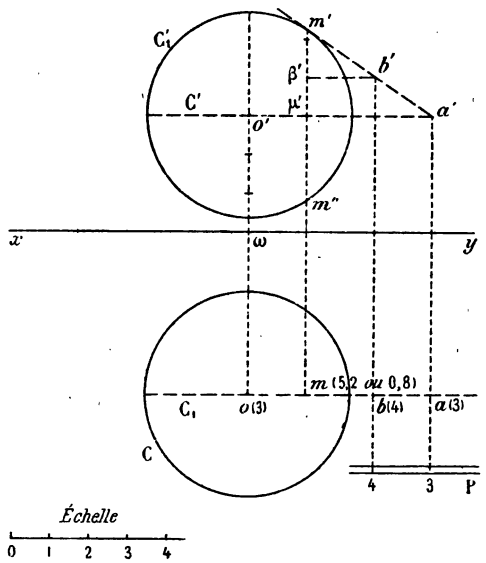


Fig. 68

o' et de rayon égal à celui du cercle C. Le point cherché appartient d'ailleurs au cercle de contour apparent vertical, puisqu'il est dans le plan de front om qui contient ce cercle; par suite, sa projection verticale, dans le système xy, est à l'intersection du cercle C'_1 et de la ligne de rappel du point m. Cette ligne de rappel et ce cercle se rencontrent en deux points m' et m'' symétriques par rapport à la trace horizontale C' du plan horizontal de cote 3, c'est-à-dire du plan du contour apparent horizontal. Il en résulte qu'il existe deux points de la sphère projetés horizontalement en m; leurs cotes sont équidistantes de celle du centre de la sphère; la cote de l'un est $3 + \mu'm'$, celle de l'autre $3 - \mu'm''$. Dans l'épure, $\mu'm'$ et $\mu'm''$ sont des longueurs égales ayant pour mesure environ 2 unités 2 dixièmes de l'échelle; donc les points obtenus ont pour cotes approximatives 5,2 et 0,8.

135. Pour procéder avec le minimum de constructions, il est préférable de prendre comme plans de projections, le plan horizontal

de cote 3 passant par le centre de la sphère et le plan vertical *om* (*fig.* 69). Dans ce système, le centre de la sphère se trouve sur la ligne de terre, et ses deux projections *o*, *o'* sont confondues.

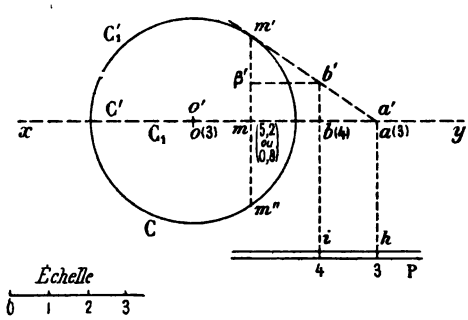


Fig. 69

La projection verticale C'_1 du contour apparent vertical est confondue avec la projection horizontale C du contour apparent horizontal. De même, la projection verticale C' du contour apparent horizontal et la projection horizontale C_1 du contour apparent horizontal sont confondues avec la portion de la ligne de terre comprise à l'intérieur du cercle C (ou C'_1). D'ailleurs, la projection horizontale *m* du point cherché étant située sur le segment C_1, ce point appartient au contour apparent vertical. En rappelant *m* en *m'* et *m''* sur la projection verticale C'_1 de ce contour, on a donc les projections verticales des deux points de la sphère projetés horizontalement en *m*. Les cotes de ces points, symétriques par rapport au plan horizontal de cote 3, sont $3 + mm'$ et $3 - mm'$, approximativement dans l'épure 5,2 et 0,8.

136. 2° *Plan tangent à la sphère en l'un des points projetés en m.* — Proposons-nous par exemple de déterminer le plan tangent à la sphère en celui des points dont la projection est *m* et dont la cote est supérieure à celle du centre de la sphère. Ce point M a pour projection verticale *m'* dans le système de projection auxiliaire *xy* (*fig.* 68 et 69). Le plan tangent cherché est perpendiculaire au rayon aboutissant au point M, ses horizontales sont donc, en projection, perpendiculaires à *om*, ou encore ses échelles de pente sont parallèles à *om*. En outre, ce plan tangent contient (115, 4°) la tangente en M au grand cercle intersection de la sphère avec le plan vertical *om*, grand cercle dont la projection verticale est C'_1 ; or, cette tangente est projetée horizontalement suivant *om* et verticalement suivant la tangente *m'a'* au cercle C'_1 ; elle rencontre le plan horizon-

tal de cote 3 (celui qui passe par le centre de la sphère) au point (a, a'). Donc le point projeté horizontalement en a est un point de cote 3 du plan tangent cherché ; par suite, l'horizontale de cote 3 de ce plan est projetée suivant la perpendiculaire ah menée à om par le point a.

Il est facile d'avoir une deuxième horizontale de ce plan tangent, par exemple celle dont la cote est 4. Pour cela, il suffit de chercher son intersection avec le plan horizontal de cote 4, dont la trace verticale est la parallèle $\beta'b'$ à xy, menée à 4 unités de distance au-dessus de la ligne de terre dans la figure 68, (à 1 unité seulement dans la figure 69) ; cette parallèle rencontre la droite $(ma, m'a')$, qui, comme nous l'avons fait remarquer, est une droite du plan tangent en M, au point (b, b'); le point (b, b') est donc un point de cote 4 du plan tangent et la perpendiculaire bi élevée en b à om est l'horizontale de cote 4 de ce plan. Ayant deux horizontales du plan tangent cherché, on peut graduer aisément une échelle de pente P de ce plan.

137. Remarque. — Les deux problèmes que nous venons de résoudre pourraient encore s'énoncer : *Trouver l'intersection d'une sphère avec une verticale ou une droite de bout donnée.*

Ainsi, dans la figure 67, les points (m, m'), (m, m'') sont les points de rencontre de la sphère de centre (o, o') avec la verticale dont la trace horizontale est le point m.

De même, les points $m(5,2)$ et $m(0,8)$ (*fig.* 68) sont les points où la verticale ayant pour trace le point m perce la sphère de centre $o(3)$ et dont le contour apparent horizontal en projection est le cercle C.

138. Problème. — *Reconnaître la position d'un point donné par rapport à une sphère donnée.*

D'abord, il est bien évident que si l'une *au moins* des projections du point donné est extérieure à la projection de même nom du contour apparent de même nom de la sphère, ce point est extérieur à la sphère (116).

Le problème n'a donc besoin d'être résolu que lorsque chacune des projections du point est intérieure à la projection de même nom du contour apparent de même nom de la sphère.

Ainsi, par exemple, soit (*fig.* 67) à reconnaître la position du point (m, m''') par rapport à la sphère (o, o'). La verticale passant par ce point, verticale dont la trace horizontale est m, rencontre la sphère

en deux points (m, m'), (m, m'') que nous déterminerons comme au n° 131 en cherchant les projections verticales des points de la sphère projetés horizontalement en m. Autrement dit, la portion de cette verticale intérieure à la sphère est le segment dont la projection verticale est $m'm''$. Si donc la projection verticale m''' du point donné est située entre m' et m'', ce point est intérieur à la sphère ; si, au contraire, m''' est extérieur au segment $m'm''$, le point donné est extérieur à la sphère ; enfin, si m''' coïncide avec m' ou avec m'', le point donné appartient à la surface de la sphère.

Ainsi, dans l'épure de la figure 67, le point (m, m''') est intérieur à la sphère (o, o'), mais les points (m, m^{IV}), (m, m^{V}) sont extérieurs à la sphère.

139. En *Géométrie cotée*, le problème est tout aussi facile à résoudre. Pour connaître la position d'un point M donné par sa projection cotée par rapport à une sphère, on cherche d'abord les cotes des deux points M_1, M_2 de la sphère donnée situés sur la verticale du point donné, c'est-à-dire ayant leurs projections horizontales confondues avec celle de ce point. Pour cela, on procède comme nous l'avons indiqué au n° 134. Le point donné M est intérieur à la sphère si sa cote est comprise entre celles des deux points M_1 et M_2 ainsi obtenus ; il est extérieur à la sphère si sa cote est supérieure à la plus grande des cotes des points M_1 et M_2 ou inférieure à la plus petite ; enfin le point donné appartient à la sphère si sa cote est égale à l'une de celles des points M_1 ou M_2.

Ainsi, dans la figure 68, un point projeté en m et dont la cote serait 4,3 par exemple serait intérieur à la sphère, puisque nous avons trouvé que les cotes des points de la sphère projetés en m sont 5,2 et 0,8. Au contraire, un point analogue dont la cote serait 0,2 ou 6,7 serait extérieur à la sphère.

140. **Problème.** — *Déterminer la projection d'un parallèle de cote donnée dans une sphère définie par son rayon et la projection cotée de son centre.*

Soit, par exemple (*fig.* 70), à trouver la projection du parallèle de cote 6 dans la sphère dont le centre est $o(4)$ et dont le contour apparent a pour projection un cercle donné C.

Le parallèle cherché est l'intersection de la sphère avec le plan hori-

zontal de cote 6. Pour le déterminer, considérons le système de projections défini par le plan horizontal de cote 4 et un plan vertical quelconque xy passant par le centre de la sphère. Le centre de la sphère se trouve alors sur la ligne de terre et ses deux projections o et o' coïncident (135); de même, la projection verticale du contour apparent vertical est un cercle C'_1 confondu avec le cercle C. La trace verticale, dans ce système, du plan horizontal de cote 6 est la parallèle H' à xy, à 2 unités de distance de cette droite; elle rencontre C'_1 en a' et b'; en rappelant ces points sur xy en a et b on a les deux points (a, a'), (b, b') où le parallèle demandé rencontre le contour apparent vertical de la sphère. La projection de ce parallèle est alors le cercle γ de rayon oa (ou ob).

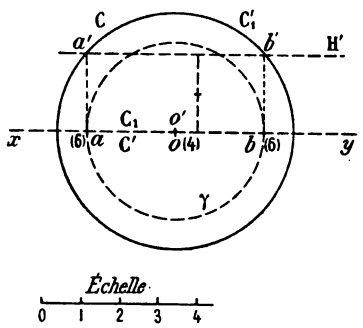


Fig. 70

§ IV.

Intersection d'une droite et d'une sphère.

141. Méthode générale. — Une droite rencontre généralement une sphère en deux points (115, 5°). Pour construire ces points, *on fait passer par la droite* D *un plan auxiliaire* P (*fig.* 71); *ce plan coupe la sphère suivant un cercle* C; *ce cercle* C *et la droite donnée* D, *étant dans le plan* P, *se rencontrent en deux points au plus* A *et* B *qui sont les points d'intersection de la droite* D *et de la sphère* S.

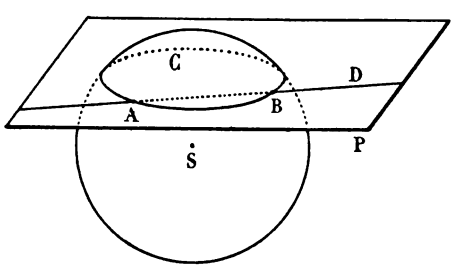


Fig. 71

Tout revient à déterminer la section faite dans la sphère par le plan auxiliaire et il faut choisir ce plan pour que les constructions soient aussi simples que possible. *Généralement, on prend comme plan auxiliaire* : 1° soit *l'un des plans projetant la droite donnée ;* 2° soit *le plan défini par cette droite et le centre de la sphère*, plan qui coupe la sphère suivant un grand cercle dont le centre et le rayon sont par suite connus *a priori*.

142. Remarque. — Nous avons déjà fait remarquer (137) que les problèmes traités aux nos 131 et 134 revenaient à chercher les points de rencontre d'une sphère et d'une verticale. Il est facile de se rendre compte que les constructions faites pour résoudre ces problèmes sont tout à fait conformes à la méthode générale que nous venons d'indiquer. En effet, dans les figures 67, 68 et 69, pour trouver les points de rencontre de la sphère donnée et de la verticale *m* nous avons d'abord considéré un plan auxiliaire passant par cette verticale (le plan de front *ab* dans la figure 67, et les plans définis par la verticale *m* et le centre de la sphère dans les figures 68 et 69) ; puis nous avons déterminé les points où la verticale *m* rencontre le cercle intersection de la sphère par ce plan auxiliaire.

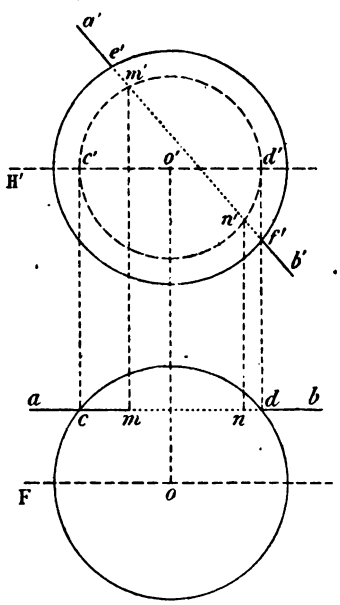


Fig. 72

143. Problème. — *Déterminer les points d'intersection d'une sphère avec une horizontale ou une frontale donnée.*

Soit, par exemple, à trouver (*fig.* 72) les points de rencontre de la frontale (*ab*, *a'b'*) avec la sphère de centre (*o*, *o'*) représentée par ses contours apparents. Dans ce *cas particulier*, le plan projetant horizontalement la droite est le plan de front *ab* ; ce plan coupe la sphère donnée suivant un parallèle de front projeté horizontalement (127) suivant le segment *cd* et verticalement suivant le cercle de diamètre

$c'd'$. Or, ce parallèle rencontre la droite (ab, $a'b'$) aux deux points projetés verticalement en m' et n' que l'on rappelle ensuite en m et n sur ab. Ces points (m, m'), (n, n') sont par conséquent ceux où la droite rencontre la sphère.

Ponctuation. — Représentons la *surface* de la sphère supposée opaque. La portion (mn, $m'n'$) de la droite donnée, comprise à l'intérieur de la sphère est cachée sur les deux projections. En outre, le point (n, n') étant au-dessous du plan horizontal H' qui contient le contour apparent horizontal de la sphère est sur l'hémisphère caché de cette sphère ; donc en projection horizontale la portion nd de la droite est cachée par la surface opaque de la sphère. Au contraire, les demi-droites indéfinies am et db sont vues, car le point (m, m') situé sur l'hémisphère supérieur est vu.

De même, la droite (ab, $a'b'$) est tout entière en arrière du plan de front F contenant le contour apparent vertical ; donc les segments $e'm'$, $n'f'$ de la projection verticale sont cachés par la surface opaque de la sphère.

Si l'on avait supposé la sphère pleine et *solide*, les segments mn et $m'n$ auraient dû être représentés en trait enlevé, car la portion de la droite intérieure à la sphère aurait été noyée dans le solide.

144. Problème. — *Déterminer les points d'intersection d'une droite quelconque avec une sphère définie par ses contours apparents.*

Premier procédé. — Soit, par exemple, à déterminer les points de rencontre de la droite (ab, $a'b'$) avec la sphère (o, o') (*fig.* 73). *Nous pouvons ramener ce problème au précédent en rendant la droite de front par un changement de plan vertical* ; pour cela, il suffit de prendre comme nouveau plan vertical de projection un plan parallèle au plan vertical ab projetant horizontalement la droite.

Dans l'épure, nous avons pris pour nouveau plan vertical de projection x_1y_1 le plan vertical ab lui-même et comme plan horizontal de projection le plan H' contenant le contour apparent horizontal de la sphère. Par conséquent, le point (c, c') où la droite rencontre ce plan H' a une cote nulle dans le système x_1y_1 et sa nouvelle projection verticale c'_1 coïncide avec c ; si nous considérons maintenant le point (d, d'), sa nouvelle cote est mesurée par la distance $o'd'$ et sa nouvelle projection verticale d'_1 s'obtient en portant sur la perpendiculaire élevée en d à x_1y_1 la longueur dd'_1 égale à $o'd'$; $c'_1d'_1$ est alors

la projection verticale de la droite dans le nouveau système de projections. Quant au centre de la sphère, il est aussi dans le plan horizontal choisi comme plan de projection ; sa cote est donc nulle et sa nouvelle projection verticale o'_1 se trouve au pied de la perpendiculaire abaissée de o sur x_1y_1.

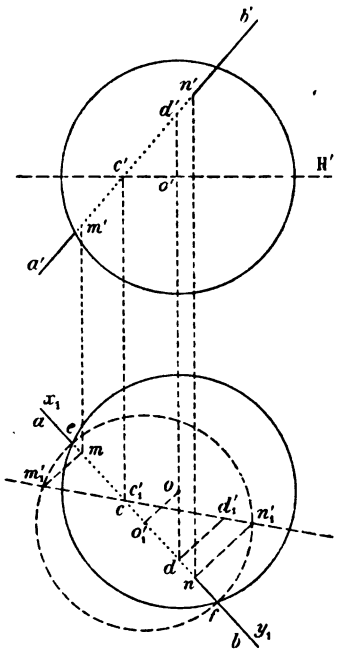


Fig. 73

Le plan vertical x_1y_1 qui contient la droite donnée coupe la sphère suivant un parallèle de front dans le nouveau système de projections ; ce parallèle a pour diamètre ef et sa projection verticale, qui a pour centre la projection verticale du centre de la sphère, est par conséquent le cercle de centre o'_1 et de rayon o'_1e (127). Ce cercle rencontre la nouvelle projection verticale $c'_1d'_1$ de la droite aux points m'_1 et n'_1, que l'on rappelle horizontalement en m et n sur ab, puis en m' et n' sur l'ancienne projection verticale $a'b'$. Les points cherchés sont (m, m') et (n, n').

Le lecteur n'aura pas de peine à justifier la ponctuation que nous avons établie en représentant la surface de la sphère supposée opaque.

145. Remarque. — Au lieu de faire un changement de plan vertical, on aurait pu employer un rabattement. On peut, du reste, se rendre compte immédiatement, dans la figure 73, que le cercle de diamètre ef est le rabattement du petit cercle intersection de la sphère avec le plan vertical ab lorsqu'on rabat ce plan sur le plan horizontal H' ; de même, $c'_1d'_1$ est le rabattement de la droite $(ab, a'b')$. Les constructions que nous avons expliquées au moyen d'un changement de plan vertical peuvent donc encore se justifier par ce rabattement.

146. Deuxième procédé. — Soit encore à trouver les points de rencontre de la droite $(ab, a'b')$ avec la sphère (o, o') (*fig.* 74). Prenons, cette fois, comme plan auxiliaire le plan déterminé par le centre de la sphère et la droite $(ab, a'b')$. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle C et si on le rabat sur le plan horizontal H′ passant par le centre de la sphère, ce grand cercle vient coïncider avec le contour apparent horizontal ; après le rabattement sa projection horizontale est donc le cercle C. Dans ce rabattement, la charnière est l'horizontale $(oc, o'c')$ joignant le centre de la sphère au point (c, c') où la droite $(ab, a'b')$ coupe le plan horizontal H′ ; pour avoir le rabattement de la droite $(ab, a'b')$, on remarque alors que le point (c, c') situé sur la charnière ne bouge pas, de sorte qu'il suffit de rabattre un deuxième point ; dans l'épure, nous avons rabattu le point (d, d') dont les projections sont sur la ligne de rappel oo' ; le triangle rectangle $d\delta d_2$ de rabattement de ce point, où $dd_2 = o'd'$, nous a permis d'obtenir le rabattement cherché d_1. Le rabattement de la droite est cd_1 ; il rencontre le cercle C aux deux points m_1 et n_1 ; en relevant ces points on obtient sans difficulté en (m, m') et (n, n') les projections des points où la droite $(ab, a'b')$ rencontre la sphère.

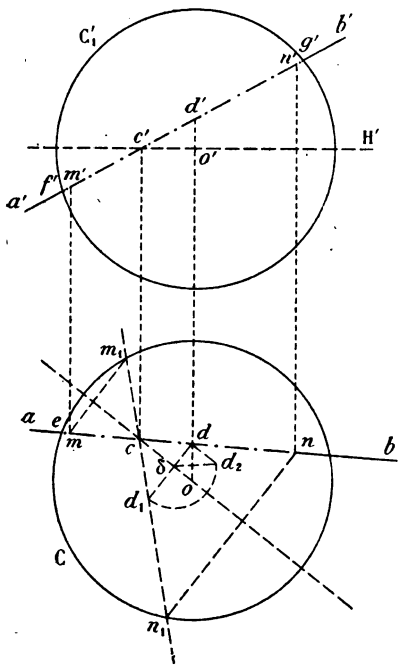


Fig. 74

Ponctuation. — Nous avons supposé la sphère solide. Le segment $(mn, m'n')$ de la droite intérieur à cette sphère est alors enlevé. Sur la projection horizontale le segment em est caché par la surface de la sphère, puisque le point (m, m') est au-dessous du contour apparent

horizontal. De même, les points (m, m') et (n, n') situés en arrière du contour apparent vertical sont cachés sur la projection verticale ; par suite, sur cette projection, les segments $m'f'$ et $n'g'$ sont cachés. Tout le reste est vu.

147. Cas particulier. — *Intersection d'une sphère avec une droite dont l'une des projections passe par la projection de même nom du centre de la sphère.*

Dans ce cas particulier, une rotation est préférable à un changement de plan ou à un rabattement, parce qu'elle n'exige que des constructions plus simples.

Ainsi, soit à chercher les points de rencontre de la sphère (o, o') avec la droite $(ab, a'b')$ dont la projection verticale $a'b'$ passe par la projection verticale o' du centre de la sphère (*fig.* 75). Prenons comme plan auxiliaire le plan de bout $a'b'$ projetant verticalement la droite. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle et ce sont les points où ce grand cercle rencontre la droite qu'il faut déterminer. Pour cela, faisons tourner le plan de bout $a'b'$ autour de la droite de bout passant par le centre de la sphère jusqu'à l'amener en coïncidence avec le plan horizontal H' passant par (o,o') ; après cette rotation, le grand cercle d'intersection vient coïncider avec le contour apparent horizontal et par suite se projette suivant le cercle C. Dans la rotation, le point (a, a') où la droite $(ab, a'b')$ rencontre la droite de bout o' ne bouge pas ; un autre point quelconque (b, b') de cette droite a pour nouvelles projections b_1, b'_1 après la rotation, et on a en $(ab_1, a'b'_1)$ les projections de la droite dans sa nouvelle position. La droite ab_1 rencontre le cercle C aux deux points m_1 et n_1 ; ce sont les projections horizontales des points d'intersection de la

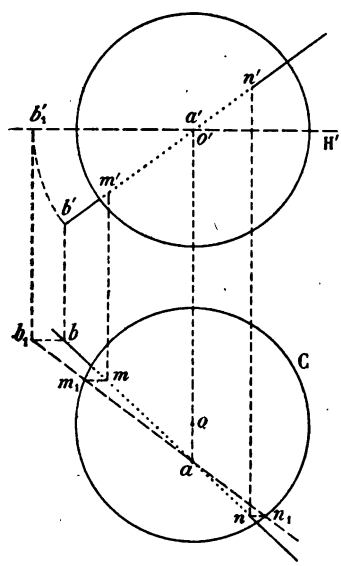


Fig. 75

sphère et de la droite après la rotation. On en déduit aisément les projections (m, m'), (n, n') de ces points avant la rotation.

La ponctuation a été établie en supposant la surface de la sphère opaque.

Remarque. — Les constructions précédentes s'appliquent en particulier à la recherche de l'intersection d'une sphère avec une droite passant par son centre.

148. Problème. — *Déterminer les points de rencontre d'une droite et d'une sphère représentées en Géométrie cotée.*

Premier procédé. — Soit à trouver les points où la droite $a(2)b(5)$ rencontre la sphère ayant pour centre le point $o(2)$ et dont le contour apparent est projeté suivant le cercle C (*fig.* 76).

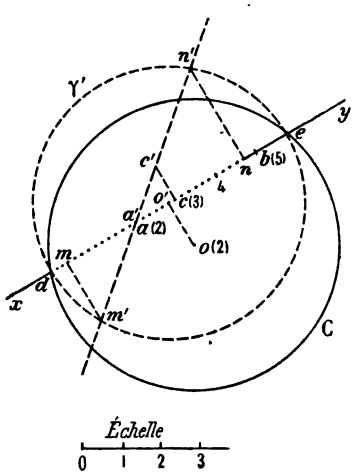


Fig. 76

Prenons comme plan auxiliaire le plan vertical xy projetant la droite et cherchons par conséquent les points où le cercle d'intersection de la sphère par ce plan vertical rencontre la droite donnée (141).

Pour que les explications soient plus claires, considérons le système de projections défini par le plan horizontal de cote 2, passant par le centre de la sphère et par le plan vertical xy. Dans ce système, le centre de la sphère étant dans le plan horizontal se projette verticalement sur xy au pied o' de la perpendiculaire abaissée du point o. Le cercle d'intersection de la sphère et du plan vertical xy est projeté horizontalement suivant le segment de, verticalement suivant le cercle γ' ayant pour diamètre le segment de (127). On obtient enfin la projection verticale $a'c'$ de la droite en joignant le point a (ou a') où cette droite rencontre le plan horizontal de cote 2 au point c' projection verticale du point $c(3)$ ($cc' = 1$ unité de l'échelle). $a'c'$ rencontre le cercle γ' aux points m' et n', qui se rappellent

horizontalement en m et n. Les points de rencontre de la droite $a(2)b(5)$ avec la sphère sont alors ceux dont les projections sont m et n et les cotes respectives : $2 - mm'$ et $2 + nn'$.

Pour établir la ponctuation, on a supposé la surface de la sphère opaque.

149. Remarque. — Dans la figure 76, le cercle γ' de diamètre ed peut être considéré comme le rabattement du petit cercle d'intersection de la sphère et du plan vertical xy lorsqu'on rabat ce plan sur le plan horizontal de cote 2 ; de même, $a'c'$ est le rabattement de la droite $a(2)c(3)$ et m' et n' sont les rabattements des points cherchés.

150. Deuxième procédé. — Employons maintenant comme plan auxiliaire le plan déterminé par le centre $o(2)$ de la sphère et la droite donnée $a(2)b(5)$ (*fig.* 77). Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle et il faut chercher les points où la droite rencontre ce grand cercle. Pour cela rabattons le plan $o(2)a(2)b(5)$ sur le plan horizontal de cote 2 passant par le centre de la sphère ; la charnière est alors l'horizontale $o(2)o(2)$. Le grand cercle d'intersection se rabat sur le contour apparent horizontal lui-même, car le centre $o(2)$ du cercle situé sur la charnière ne bouge pas et par suite le grand cercle est projeté après le rabattement, suivant le cercle C ; la droite $a(2)b(5)$ se rabat en ab_1, suivant la droite joignant le point a où elle rencontre la charnière au point b_1, rabattement du point $b(5)$ ($bb_2 = 3$ unités de l'échelle). Les points m_1 et n_1 où ab_1 rencontre le cercle C sont alors les rabattements des points cherchés. On en déduit aisément leurs projections m et n ; quant à leurs cotes, on les obtient en considérant ces points comme appartenant à la droite $a(2)b(5)$.

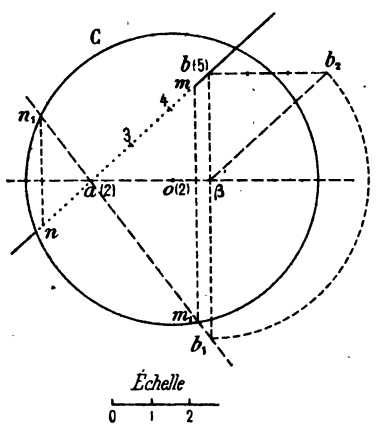


Fig. 77

§ V.

Section plane de la sphère.

151. On démontre en Géométrie que la section d'une sphère par un plan est une circonférence dont le centre est la projection du centre de la sphère sur le plan sécant.

Pour définir sur une épure les ellipses projections de cette circonférence : 1° on peut en construire les *axes de symétrie* et *les sommets* ; 2° on peut aussi en déterminer un *point quelconque* et *la tangente en ce point ;* dans ce cas, on emploie la méthode générale suivante.

152. Méthode générale de détermination d'un point quelconque de la section. — Soient S la sphère et P le plan sécant (*fig.* 78) ; on considère un *plan auxiliaire* A qui coupe la sphère S suivant un cercle C et le plan P suivant une droite D ; le cercle C et la droite D se coupent en général en deux points M et N ; ces deux points, situés à la fois sur la sphère S et dans le plan P, sont deux points de la section.

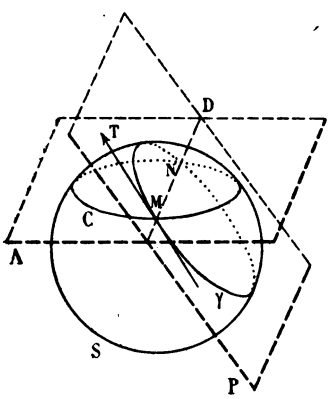


Fig. 78

Choix des plans auxiliaires. — Pour que les constructions auxquelles donne lieu cette méthode soient simples, on prend comme plans auxiliaires des *plans horizontaux ou de front,* de manière que les projections du cercle C soient un cercle facile à tracer (125 et 127).

153. La tangente en un point quelconque de la section est définie par le théorème suivant.

Théorème. — *La tangente en un point d'une section plane est la droite d'intersection du plan sécant et du plan tangent à la sphère au point considéré.*

En effet, la tangente MT à la section plane γ (*fig.* 78) est située dans le plan de cette courbe, c'est-à-dire dans le plan sécant P. Comme cette courbe γ est située sur la surface de la sphère, la tangente MT est aussi dans le plan Q tangent à la sphère au point M (115, 4°). La tangente MT située dans les deux plans P (sécant) et Q (tangent) est donc leur intersection.

154. I. Cas particulier. — *Déterminer l'intersection d'une sphère avec un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Soit à déterminer l'intersection du plan de bout PαQ avec la sphère

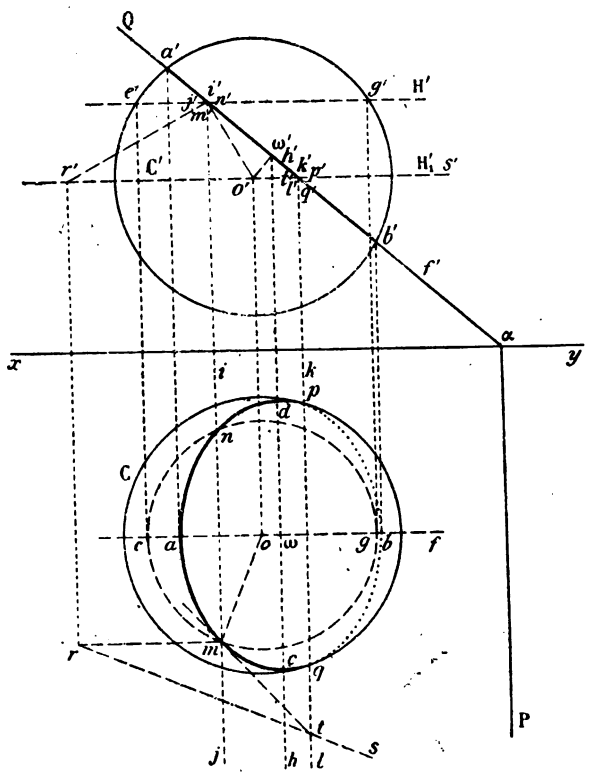


Fig. 79

de centre (o, o') figurée par ses deux contours apparents (*fig.* 79).

1° *Centre.* — Le centre de la section est le pied (ω, ω') de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant.

2° *Projection verticale.* — La projection verticale du cercle d'intersection se réduit au segment $a'b'$ de la trace verticale du plan de bout comprise à l'intérieur de la projection du contour apparent vertical (116).

3° *Sommets de la projection horizontale.* — La projection horizontale est une ellipse qui a pour centre le point ω et dont les axes sont les projections du diamètre horizontal de la circonférence d'intersection et du diamètre perpendiculaire à celui-ci (102, 1°).

Or l'horizontale passant par le centre (ω, ω') de la circonférence est la droite de bout (ωh, $\omega' h'$) du plan P2Q ; la perpendiculaire menée par le point (ω, ω') à cette horizontale est la frontale (ωf, $\omega' f'$). Les extrémités des diamètres de la circonférence dirigés suivant ces droites sont les points où elles rencontrent la sphère. On remarque immédiatement que la frontale (ωf, $\omega' f'$) située dans le plan de front passant par le centre de la sphère, rencontre le contour apparent vertical aux points (a, a'), (b, b') : les points a et b sont donc les extrémités du petit axe de la projection horizontale.

Quant au diamètre de la circonférence dirigé suivant l'horizontale (ωh, $\omega' h'$), il se projette horizontalement en vraie grandeur ; mais $a'b'$ est aussi la vraie grandeur du diamètre de cette circonférence ; on obtient donc les extrémités du grand axe de la projection horizontale en portant sur ωh les longueurs ωc et ωd égales à $\omega' a'$.

Ayant ainsi les quatre sommets a, b, c, d de l'ellipse projection horizontale de la section, on peut facilement construire cette ellipse par points en utilisant les procédés géométriques connus (114). Mais on peut également obtenir directement un point quelconque de l'ellipse projection.

4° *Point quelconque de la projection horizontale et tangente en ce point.* — Employons la méthode indiquée au n° 152. Coupons la sphère et le plan sécant par un plan horizontal quelconque H'. Ce plan détermine dans la sphère un parallèle projeté horizontalement suivant le cercle de diamètre eg ; il coupe le plan P2Q suivant la droite debout (ij, $i'j'$). Cette droite et le parallèle se rencontrent aux points (m, m'), (n, n') qui sont deux points de l'intersection.

La tangente au point (m, m') est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la sphère au même point. On connaît déjà un

premier point de cette intersection, le point (m, m') ; il suffit d'en trouver un second. Pour cela, coupons le plan tangent et le plan sécant par le plan horizontal H'_1 passant par le centre de la sphère. Ce plan horizontal auxiliaire coupe le plan sécant suivant la droite de bout $(kl, k'l')$. Il coupe le plan tangent suivant une horizontale ; or, les horizontales du plan tangent sont perpendiculaires au rayon de la sphère aboutissant au point (m, m'), c'est-à-dire que leurs projections horizontales sont perpendiculaires à om ; d'autre part, la frontale $(mr, m'r')$ du plan tangent, frontale dont la projection verticale est perpendiculaire à $o'm'$, rencontre le plan horizontal H'_1 au point (r, r') ; ce point appartient donc à l'horizontale du plan tangent située dans le plan horizontal H'_1 ; par suite, cette horizontale est projetée horizontalement suivant la perpendiculaire rt à om ; elle rencontre la droite $(kl, k'l')$ au point (t, t'). Ce point est le deuxième point cherché de la tangente : cette tangente est par conséquent la droite $(mt, m't')$.

5° *Points sur le contour apparent horizontal.*— Il ne faut pas oublier de déterminer les points où le cercle d'intersection rencontre le contour apparent horizontal de la sphère; car la détermination de ces points est *indispensable* pour la ponctuation de la projection horizontale de la section ; en effet, c'est en ces points que la section passe de l'hémisphère supérieur de la sphère qui est vu en entier à l'hémisphère inférieur qui est caché (117). C'est donc en ces points que la ponctuation de la section se modifie.

Pour obtenir ces points, il suffit de prendre comme plan auxiliaire (152) le plan horizontal H'_1 qui passe par le centre (o, o') de la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle projeté horizontalement suivant le contour apparent horizontal (C, C') et le plan sécant suivant l'horizontale $(kl, k'l')$. Les points (p, p') et (q, q') communs à cette horizontale et au cercle (C, C') sont les points cherchés.

Aux points p et q l'ellipse est tangente au cercle C ; en effet, les tangentes en (p, p') et (q, q') à la section et au contour apparent horizontal ont même projection horizontale, puisqu'elles sont contenues dans le plan tangent à la sphère en ces points et que ces plans tangents sont verticaux. Ceci résulte d'ailleurs du théorème général démontré précédemment (118).

6° *Ponctuation.* — Supposons la surface de la sphère opaque. En projection verticale, le segment $a'b'$ est vu tout entier parce qu'il est

la projection du demi-cercle d'intersection situé en avant du plan de front contenant le contour apparent vertical. En projection horizontale, l'arc *pdnamcq* est *vu*, car il est facile de se rendre compte sur la projection verticale qu'il est la projection de la portion de la circonférence située au-dessus du plan du contour apparent horizontal; au contraire, l'arc *pbq* est caché comme projection de la portion de la circonférence située sur l'hémisphère caché, c'est-à-dire au-dessous du plan horizontal H_1'.

On aurait à faire des constructions tout à fait analogues pour déterminer l'intersection d'une sphère avec un plan vertical.

155. II. **Cas général.** — *Déterminer l'intersection d'une sphère et d'un plan quelconque, définis dans un système de deux plans de projection.*

Première méthode. Détermination des axes des deux projections. — Pour définir les deux ellipses projections de la section, on peut chercher leurs axes. Pour cela, on *ramène la recherche de l'intersection d'un plan quelconque avec une sphère au cas particulier traité au n° 154. Il suffit pour cela de faire un changement de plan vertical ou un changement de plan horizontal de manière à amener successivement le plan sécant à être de bout, puis vertical.* Le lecteur a pu se rendre compte, en effet, que lorsque le plan sécant est perpendiculaire à l'un des plans de projection, il est très aisé de déterminer rapidement les axes de la projection sur l'autre plan de projection.

156. Ainsi, soit à chercher la section de la sphère de centre (o, o') définie par ses deux contours apparents avec le plan déterminé par l'horizontale et la frontale concourantes $(ah, a'h')$, $(af, a'f')$ (*fig.* 80).

1° *Axes de la projection horizontale.* — Rendons le plan sécant de bout; il faut (I, 244) que la nouvelle ligne de terre x_1y_1 soit perpendiculaire aux horizontales de ce plan. En faisant passer cette ligne de terre x_1y_1 par le point o et en élevant en même temps le plan horizontal de projection jusqu'au centre de la sphère, le centre se trouve alors sur x_1y_1, ses deux projections o, o_1' coïncident et le contour apparent vertical de la sphère dans le nouveau système de projections a sa projection verticale confondue avec le cercle C, projection horizontale du contour apparent horizontal (135). On évite ainsi le tracé d'une nouvelle circonférence.

Dans ce système, la trace horizontale du plan sécant est l'horizontale ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) intersection du plan donné avec le plan horizontal H'

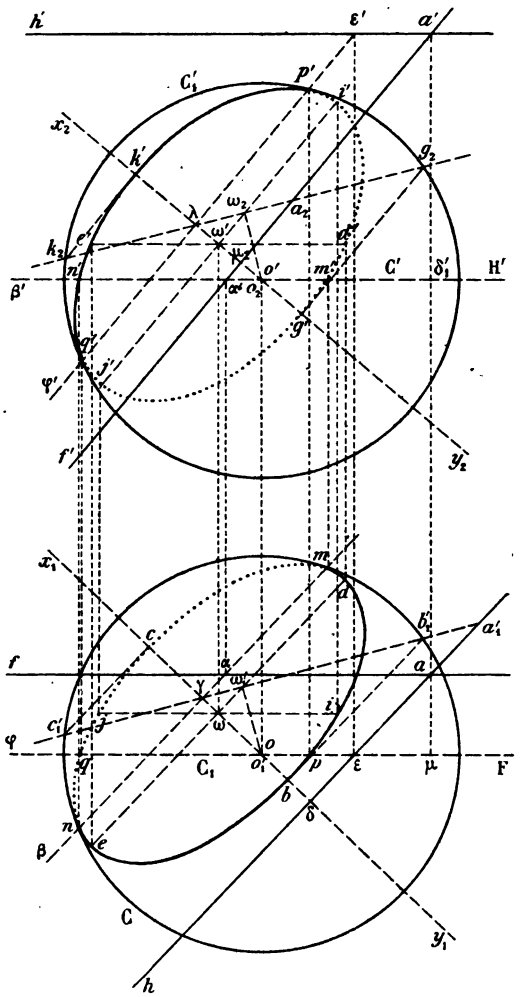


Fig. 80

passant par (o, o'). Le point γ où $\alpha\beta$ rencontre x_1 y_1 est donc un premier point de la nouvelle trace verticale du plan sécant ; pour en avoir un deuxième point, il suffit de chercher la nouvelle projection

verticale d'un point quelconque du plan sécant ; nous avons construit dans l'épure celle du point (a, a') en portant sur la perpendiculaire abaissée de a sur x_1y_1 la longueur $\delta a'_1$ égale à la cote $\delta'_1 a'$ de ce point par rapport au nouveau plan horizontal de projection H'. La trace verticale du plan sécant dans le système x_1y_1 est donc $\gamma a'_1$. Dès lors, pour avoir les axes de la projection horizontale, il suffit d'effectuer les constructions expliquées au n° 154.

Le centre de la section est le point (ω, ω'_1), pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan de bout $\beta\gamma a'_1$. La trace verticale de ce plan rencontrant le contour apparent vertical aux points (b, b'_1), (c, c'_1), les points b et c sont les sommets du petit axe de l'ellipse. En menant l'horizontale du plan sécant passant par le centre de la section et en portant sur la projection horizontale de cette droite les longueurs ωd et ωe égales au rayon $\omega'_1 b'_1$ du cercle d'intersection, on a en d et e les sommets du grand axe.

157. 2° *Axes de la projection verticale.* — Par analogie avec ce qui précède, on obtient les axes de la projection verticale en rendant le plan sécant vertical. Pour cela (23) prenons comme ligne de terre auxiliaire une droite x_2y_2 perpendiculaire aux frontales du plan. Dans l'épure, nous avons fait passer cette ligne de terre par le point o' et nous avons pris comme plan vertical de projection le plan de front passant par le centre de la sphère. De cette manière, le centre de la sphère se trouve sur la ligne de terre et ses deux projections o_2, o' dans le nouveau système de projections coïncident ; de plus, il n'est pas nécessaire de tracer la nouvelle projection horizontale du contour apparent horizontal, car elle est confondue avec la projection verticale C'_1 du contour apparent vertical (135).

La trace verticale du plan sécant, dans le système x_2y_2, est alors la frontale $(\varepsilon\varphi, \varepsilon'\varphi')$ de ce plan contenue dans le plan de front passant par le centre de la sphère. Le point λ où elle rencontre x_2y_2 est un premier point de la trace horizontale ; pour en obtenir un deuxième, nous avons cherché la nouvelle projection horizontale a_2 du point (a, a') en portant sur la ligne de rappel $a'\mu_2$ la longueur $\mu_2 a_2$ égale à l'éloignement $a\mu$ de ce point par rapport au plan de front passant par le centre de la sphère. La trace horizontale du plan sécant dans le nouveau système de projections est donc λa_2.

Le centre du cercle d'intersection est le point (ω_2, ω'), pied de la perpendiculaire abaissée du centre (o_2, o') de la sphère sur le plan

vertical $g_2\lambda\varphi'$. Pour vérifier l'exactitude des constructions, on s'assure que les points (ω, ω') sont sur une même ligne de rappel.

La trace horizontale λg_2 du plan sécant rencontre le contour apparent horizontal de la sphère aux points (g_2, g'), (k_2, k') et les points g', k' sont les sommets du petit axe de la projection verticale. Quant au grand axe, il est la projection du diamètre de front de la section ; ce diamètre se projette verticalement suivant la parallèle menée par ω' à la frontale $a'f'$; d'autre part, comme g_2k_2 est aussi un diamètre de la circonférence d'intersection, on obtient les extrémités du grand axe de l'ellipse en portant sur la frontale du point ω' les longueurs $\omega'i'$ et $\omega'j'$ égales à ω_2g_2.

158. Remarques. I. — Les longueurs de et $i'j'$ doivent être égales entre elles comme égales l'une et l'autre au diamètre du cercle d'intersection.

II. — Les points de la section projetés horizontalement en d et e sont les extrémités du diamètre horizontal de la section ; ils se projettent verticalement en d' et e', à l'intersection des lignes de rappel des points d et e et de la perpendiculaire aux lignes de rappel menée par ω'.

De même, les extrémités du diamètre de front, projetées verticalement en i' et j', se projettent horizontalement en i et j à l'intersection des lignes de rappel des points i' et j' avec la projection horizontale de la frontale du plan sécant passant par le point (ω, ω').

159. 3° *Points de l'intersection situés sur les contours apparents de la sphère.*

On obtient les points situés sur le *contour apparent horizontal* C en prenant comme plan auxiliaire (152) le plan horizontal H' qui passe par le centre de la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant le cercle (C, C') et le plan sécant suivant l'horizontale $(\alpha\beta, \alpha'\beta')$ qui se rencontrent aux points cherchés (m, m') et (n, n'). Aux points m et n, le cercle C et l'ellipse projection horizontale de la section sont tangents (118).

De même, on obtient les points situés sur le *contour apparent vertical* C_1' en prenant comme plan auxiliaire (152) le plan de front F qui contient le centre de la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant le cercle (C_1, C_1') et le plan sécant suivant la frontale $(\varepsilon\varphi, \varepsilon'\varphi')$ qui se

rencontrent aux points cherchés (p, p') et (q, q'). Aux points p' et q' le cercle C'_1 et l'ellipse projection verticale de la section sont tangents (118).

160. 4° *Ponctuation.* — La sphère étant supposée opaque, on voit que le point (e, e'), par exemple, est au-dessus du plan horizontal H' qui contient le contour apparent horizontal de la sphère. Donc ce point est vu en projection horizontale et il en est de même de l'arc de l'intersection projeté en *nebpidm* ; au contraire, l'arc projeté en *mcjqn* est caché, car il appartient à l'hémisphère situé au-dessous du plan horizontal H'.

De même, le point (e, e') est en avant du plan de front F contenant le contour apparent vertical, par suite il est vu en projection verticale ; l'arc de l'intersection projeté verticalement en $q'n'e'k'p'$, qui contient ce point est donc vu sur cette projection ; au contraire, l'arc projeté en $q'j'g'm'd'i'p'$ est caché, car il est situé sur l'hémisphère situé en arrière du plan de front F_1.

Remarque. — On voit que sur chaque projection de la section, les parties vues et les parties cachées sont séparées par les points où cette section rencontre le contour apparent de même nom ; c'est pourquoi il ne faut jamais oublier de déterminer ces points.

161. Deuxième méthode. — On peut aussi déterminer autant de points de la section que l'on veut par l'emploi de plans auxiliaires horizontaux ou de front (152). Avec un nombre de points assez restreint et les points situés sur les deux contours apparents (154, 5°) on peut ensuite tracer avec une exactitude suffisante les deux ellipses projections horizontale et verticale du cercle d'intersection.

Soit, par exemple, à déterminer l'intersection de la sphère (o, o') avec le plan défini par les droites concourantes $(ab, a'b')$, $(ac, a'c')$ (*fig.* 81).

Appliquons la méthode générale indiquée (152).

162. 1° *Détermination d'un point quelconque.* — Coupons la sphère et le plan sécant par le plan auxiliaire horizontal H'. Ce plan coupe la sphère suivant le parallèle projeté suivant le cercle (γ, γ') et le plan sécant suivant l'horizontale $(bc, b'c')$; cette horizontale ren-

contre le parallèle (γ, γ') aux deux points (m, m'), (n, n') qui sont

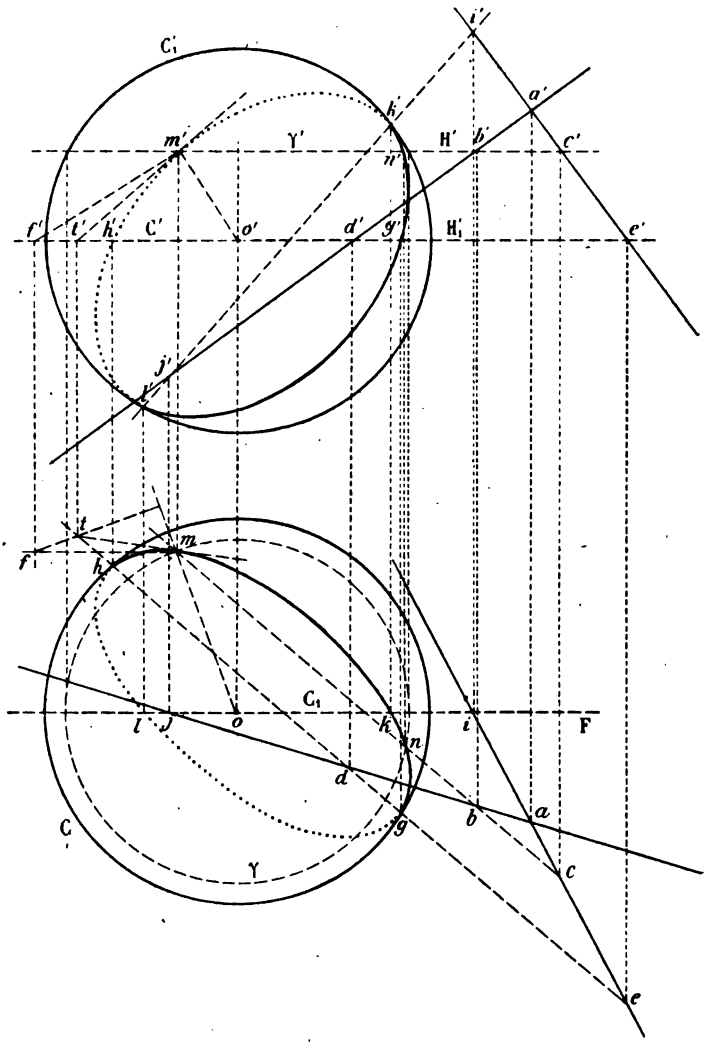


Fig. 81

deux points de l'intersection.

163. 2° *Tangente au point* (m, m'). — Nous aurons la tangente au

point (m, m'), en cherchant l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan sécant (153). Nous connaissons déjà un premier point de cette intersection, le point (m, m'), point de contact de la tangente. Il suffit donc d'en déterminer un deuxième point. Pour cela, coupons les deux plans par un plan auxiliaire, par exemple par le plan horizontal H'_1 passant par le centre de la sphère. Ce plan horizontal coupe le plan sécant suivant l'horizontale $(de, d'e')$, parallèle à $(bc, b'c')$.

Pour avoir ensuite la droite d'intersection de ce même plan horizontal et du plan tangent, nous remarquons que cette droite est une horizontale et par conséquent que sa projection horizontale est perpendiculaire à om, projection horizontale du rayon de la sphère aboutissant au point de contact; or, la frontale $(mf, m'f')$ menée par le point (m, m') dans le plan tangent ($m'f'$ est perpendiculaire à $o'm'$) perce le plan horizontal H'_1 au point (f, f'), et ce point appartient évidemment à l'horizontale d'intersection du plan H'_1 et du plan tangent. Cette horizontale est donc la droite $(ft, f't')$ dont la projection horizontale est la perpendiculaire abaissée de f sur om; le point (t, t') où elle rencontre $(de, d'e')$ est donc un point de la tangente à la section au point (m, m'); par conséquent les projections de cette tangente sont $(tm, t'm')$.

164. 3° *Points de l'intersection situés sur les contours apparents de la sphère.* — On procède comme il a été indiqué au n° 159. Le plan auxiliaire horizontal H'_1 coupe la sphère suivant le cercle (C, C'), le plan sécant suivant l'horizontale $(de, d'e')$ qui donnent les deux points (g, g') et (h, h') situés sur le contour apparent horizontal; aux points g et h le cercle C et l'ellipse projection horizontale de la section sont tangents (118).

Le plan auxiliaire de front F coupe la sphère suivant le cercle (C_1, C'_1) et le plan sécant suivant la frontale $(ij, i'j')$ qui donnent les deux points (k, k') et (l, l') situés sur le contour apparent vertical. Aux points k' et l', le cercle C' et l'ellipse projection verticale de la section sont tangents (118).

Il est alors facile de tracer les deux ellipses projections.

165. 4° *Ponctuation.* — Le lecteur n'aura aucune peine à justifier la ponctuation des deux ellipses.

166. Problème. — *Déterminer la section faite dans une sphère, définie en géométrie cotée, par le plan de deux droites concourantes dont on donne les projections cotées.*

Soient, par exemple, o(3) le centre de la sphère, C la projection

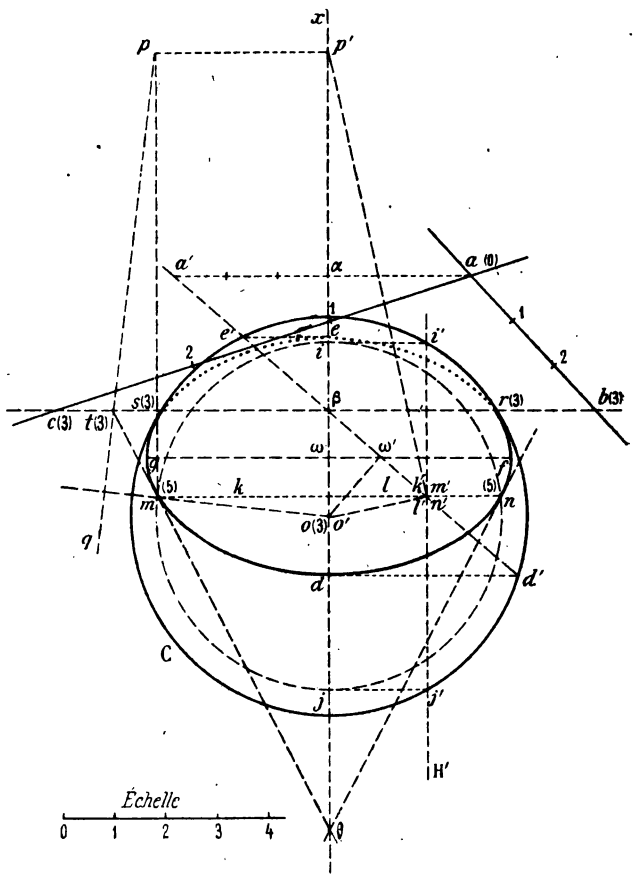


Fig. 82

horizontale de son contour apparent et $a(o)b(3)$, $a(o)c(3)$ les deux droites définissant le plan sécant (*fig.* 82).

Méthode. — Nous ramènerons encore ce problème à celui traité au

n° 154, en introduisant un *plan vertical auxiliaire de projection perpendiculaire au plan sécant, de manière que dans le système des deux plans de projections ainsi défini, le plan sécant soit un plan de bout.*

Dans l'épure, nous avons pris comme plan vertical de projection le plan vertical xy mené par le centre de la sphère perpendiculairement à l'horizontale $b(3)c(3)$ du plan sécant; nous avons également pris comme plan horizontal de projection celui qui passe par le centre de la sphère. De cette manière, le centre de la sphère se trouve situé sur la ligne de terre et ses projections o, o' sont confondues. De plus, le contour apparent vertical de la sphère se projette verticalement suivant le cercle C déjà tracé (135).

La trace horizontale du plan sécant, dans ce système de projections, est l'horizontale $c(3)b(3)$. Le point $a(o)$ se projette verticalement en a', sur la perpendiculaire abaissée de a sur xy, à une distance $\alpha a'$ de la ligne de terre égale à 3 unités de l'échelle. Par conséquent, puisque, dans le système xy, le plan sécant est un plan de bout, sa trace verticale est la droite $\beta a'$ joignant le point a' au point β où la trace horizontale rencontre xy.

167. 1° *Sommets de la projection.* — Il nous suffit maintenant de recommencer les constructions expliquées au n° 154 pour obtenir la projection de la section cherchée. Le centre de cette section est le point (ω, ω'), pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan de bout $c\beta d'$; sa cote est $3 + \omega\omega'$. La trace verticale du plan rencontre le contour apparent vertical aux points (d, d'), (e, e'), par suite d et e sont les sommets du petit axe de la section; leurs cotes, dans l'espace, sont $3 + dd'$ et $3 - ee'$. Quant au grand axe, c'est la projection du diamètre horizontal du cercle d'intersection; il est donc dirigé suivant la droite $\omega\omega'$ et ses extrémités sont les points f et g obtenus en portant sur cette droite les longueurs ωf et ωg égales au rayon $\omega' d'$ du cercle dans l'espace. Les cotes de ces points sont évidemment égales à celle du centre (ω, ω').

168. 2° *Points situés sur le contour apparent de la sphère.* — On obtient ces points en prenant comme plan auxiliaire (152) le plan horizontal de cote 3 qui contient le centre de la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant le cercle projeté en C et le plan suivant

l'horizontale $b(3)c(3)$ qui se rencontrent aux points cherchés $r(3)$ et $s(3)$. En ces points, le cercle C et l'ellipse projection de la section sont tangents (118).

169. 3° *Point quelconque et tangente.* — On obtient un point quelconque de l'intersection en coupant la sphère et le plan donné par un plan horizontal auxiliaire (152). Ainsi, le plan horizontal, dont la trace verticale H′ dans le système de projections défini plus haut est parallèle à xy, coupe le plan sécant suivant la droite projetée horizontalement en kl et la sphère suivant le parallèle de diamètre $(ij, i'j')$. Cette droite et ce parallèle se coupent aux points projetés en m et n et dont les cotes sont égales à $3 + ii'$, approximativement 5 sur l'épure : ce sont deux points de la section.

La tangente au point M de la section, projeté en m, est l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan sécant (153). On connaît un premier point de cette intersection, c'est le point M; il suffit donc d'en trouver un deuxième. Pour cela, coupons les deux plans par un plan auxiliaire, par exemple par le plan horizontal de cote 3. Ce plan coupe le plan sécant suivant l'horizontale $b(3)c(3)$; il coupe le plan tangent suivant une autre horizontale dont la projection est perpendiculaire à la projection om du rayon de la sphère aboutissant au point de contact Mais, d'autre part, la frontale $(mp, m'p')$ menée par (m, m') dans le plan tangent ($m'p'$ est perpendiculaire à $o'm'$) rencontre le plan horizontal de cote 3 au point (p, p') et ce point appartient évidemment à l'horizontale de cote 3 du plan tangent. Donc cette horizontale a pour projection la perpendiculaire pq abaissée de p sur om; elle rencontre l'horizontale $b(3)c(3)$ au point $t(3)$, de sorte que la tangente cherchée est projetée en tm. La tangente à l'ellipse au point n symétrique du point m par rapport au petit axe de s'obtient immédiatement en joignant le point n au point de rencontre θ du petit axe et de la tangente en m.

4° *Ponctuation.* — On voit immédiatement que l'arc du cercle d'intersection projeté en *rfndmgs* est *vu*, tandis que le reste est *caché*.

§ VI.

Plans tangents à la sphère.

170. **Problème.** — *Mener à une sphère un plan tangent parallèle à un plan donné.*

Solution géométrique. — Supposons le problème résolu et soit Q un plan parallèle au plan donné P et tangent à la sphère O au point M (*fig*, 83). Le rayon OM est perpendiculaire au plan Q (115, 4°) et par suite au plan P. Le point de contact est donc l'un des points de rencontre (M ou M') de la sphère avec la perpendiculaire abaissée de son centre sur le plan donné P. Le problème admet par suite deux solutions, quel que soit le plan P.

171. Solution graphique. — 1° Soit à mener à la sphère (o, o') définie par ses deux contours apparents les plans tangents parallèles au plan déterminé par l'horizontale et la frontale concourantes $(ah, a'h')$, $(af, a'f')$ (*fig*. 84).

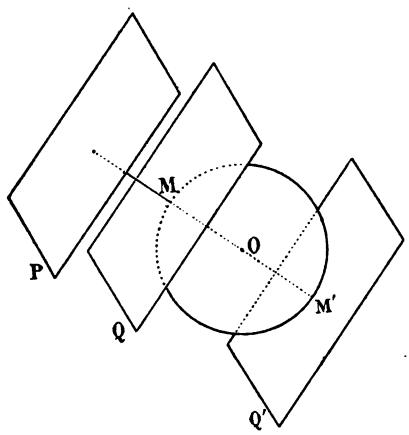


Fig. 83

La perpendiculaire abaissée du centre (o, o') sur le plan P a sa projection horizontale od perpendiculaire à ah et sa projection verticale $o'd'$ perpendiculaire à $a'f'$ (I, 170, Rem.).

Pour trouver les points d'intersection de la sphère et de la droite $(od, o'd')$, prenons comme plan auxiliaire (141) le plan vertical od projetant horizontalement la droite. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle et ce sont les points où ce grand cercle rencontre la droite qu'il faut chercher. Pour cela, faisons tourner le plan vertical od autour de la verticale passant par le centre de la sphère jusqu'à l'amener en coïncidence avec le plan de front F passant par (o, o') ; après cette rotation le grand cercle se projette verticalement suivant le cercle C'. Dans cette rotation, le point (o, o') situé sur l'axe ne bouge pas ; un autre point (d, d') de la droite a pour nouvelles projections (d_1, d'_1) après la rotation et on a en $(od, o'd'_1)$ les nouvelles projections de la droite dans sa nouvelle position. La droite $o'd'_1$ rencontre le cercle C' en deux points m'_1 et n'_1 ; ce sont les projections verticales des points d'intersection de la droite et de la sphère après la

rotation. On en déduit aisément les projections (m, m'), (n, n') de ces points avant la rotation (31).

Il reste à mener par chacun de ces points le plan parallèle au plan donné (I, 145) ou à construire le plan tangent à la sphère en ces points (132).

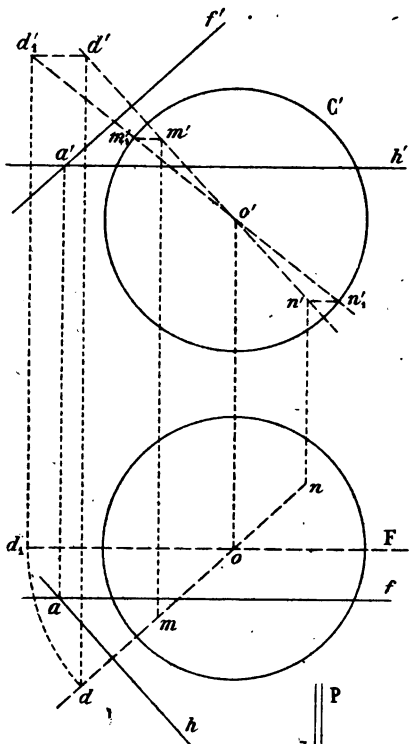


Fig. 84

172. *Géométrie cotée.* — Soit à mener à la sphère de centre $o(4)$ et dont le contour apparent en projection est le cercle C (*fig.* 85) un plan tangent parallèle au plan P défini par son échelle de pente.

La perpendiculaire abaissée du centre $o(4)$ sur le plan P a pour projection la parallèle og menée par le point o à l'échelle de pente donnée P ; son intervalle étant bc (I, 73), il est facile d'obtenir, par exemple, le point $e(5)$ de cette perpendiculaire.

On obtient les points de rencontre de la droite $o(4)e(5)$ et de la sphère en rabattant sur le plan de cote 4 le plan vertical eg projetant la droite (149). Le grand cercle d'in-

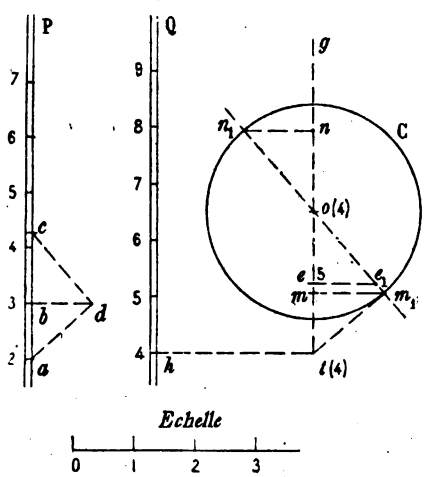


Fig. 85

tersection avec la sphère se rabat suivant la circonférence C'; la droite est rabattue en oe_1 et les rabattements m_1 et n_1 donnent en m et n de cotes respectives $4 + mm_1$ et $4 - nn_1$ les points de contact des plans cherchés et de la sphère.

Il ne reste plus qu'à construire (136) l'horizontale $h(4)l(4)$ du plan tangent en celui de ses points qui est projeté en m, pour pouvoir figurer une échelle de pente Q de ce plan, parallèle au plan P.

173. **Problème.** — *Mener par une droite donnée un plan tangent à une sphère donnée.*

Solution géométrique. — Supposons le problème résolu et soit P un plan passant par la droite donnée AB et touchant la sphère O au point M (*fig.* 86). Le rayon OM perpendiculaire à P est perpendiculaire à AB, qui est une droite du plan P ; par OM on peut donc faire passer un plan Q perpendiculaire à AB. Ce plan Q rencontre AB au point I et coupe la sphère suivant un grand cercle Γ passant par le point M, la tangente en ce point au cercle Γ est d'ailleurs la droite IM. On en conclut que pour avoir le plan tangent cherché, il suffit de mener par le centre de la sphère le plan perpendiculaire à AB, de déterminer le point de rencontre I de ce plan et de la droite AB, ainsi que le grand cercle Γ suivant lequel il coupe la sphère et enfin de mener par le point I une tangente IM au cercle Γ ; cette tangente détermine avec AB le plan tangent demandé.

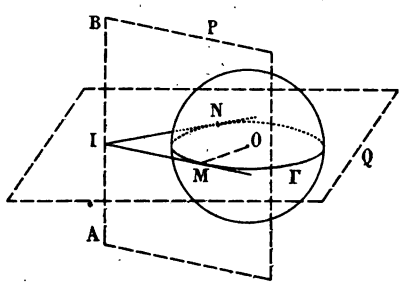


Fig. 86

Pour que le problème soit possible, il faut qu'on puisse mener par le point I des tangentes au cercle Γ, c'est-à-dire que le point I soit extérieur au cercle Γ et par suite extérieur à la sphère. Comme I est le point de AB le plus rapproché de O, cela revient à dire que la droite AB ne doit pas couper la sphère. Le problème admet alors deux solutions données par les deux tangentes IM et IN menées du point I au cercle Γ.

Remarque. — Une autre solution sera développée plus loin (362).

174. **Solution graphique.** — 1° Soit à mener par la droite $(ab, a'b')$ un plan tangent à la sphère définie par son centre (o, o') et par ses deux contours apparents (*fig.* 87).

Menons d'abord par le centre (o, o') le plan Q perpendiculaire à la droite $ab, a'b')$ (I, 172) ; ce plan est défini par l'horizontale $(oh, o'h')$ et la frontale

$(of, o'f')$. Pour obtenir le point commun à ce plan et à la droite $(ab, a'b')$ nous prenons comme plan auxiliaire le plan vertical ab qui coupe le plan Q suivant la droite $(cd, c'd')$, d'où le point cherché (i, i').

Pour mener par ce point (i, i') les tangentes au grand cercle section de la

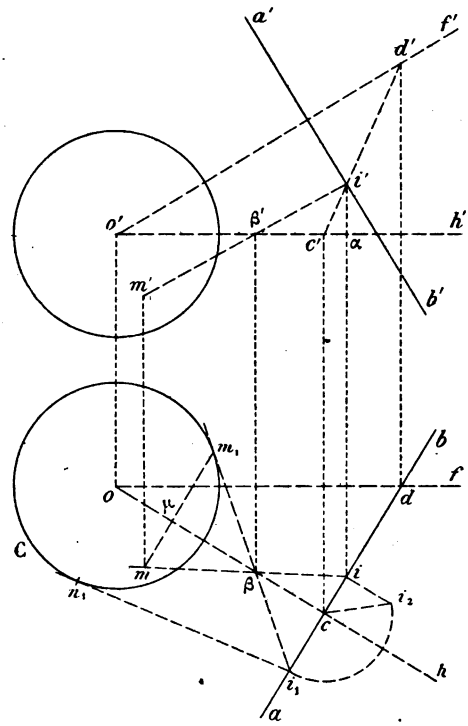


Fig. 87

sphère par le plan Q, nous rabattons ce plan Q sur le plan horizontal passant par le centre de la sphère ; la charnière est l'horizontale $(oh, o'h')$. Le grand cercle rabattu a sa projection horizontale confondue avec le cercle C de contour apparent horizontal. Le point (i, i'), après le rabattement, se projette en i_1, obtenu à l'aide du triangle rectangle ici_2, dans lequel $ii_2 = i'\alpha$. Par le point i_1, on mène alors les tangentes i_1m_1 et i_1n_1 à la circonférence C ; m_1 et n_1 sont les rabattements des points de contact des plans cherchés et de la sphère.

On obtient la projection horizontale m du point rabattu en m_1 à l'intersection de la perpendiculaire $m_1\mu$ à la charnière oh et de la droite $i\beta$ projection de la droite rabattue en $i_1\beta$.

En rappelant $i\beta$ en $i'\beta'$ sur la projection verticale, on obtient en m' la projection verticale du point de contact cherché (m, m').

L'un des plans cherchés est défini par les deux droites concourantes (ab, $a'b'$) et (im, $i'm'$).

On relèverait de même le point rabattu en n_1.

175. *Géométrie cotée.* — Soit à mener par la droite $a(3)$ $b(4)$ un plan tan-

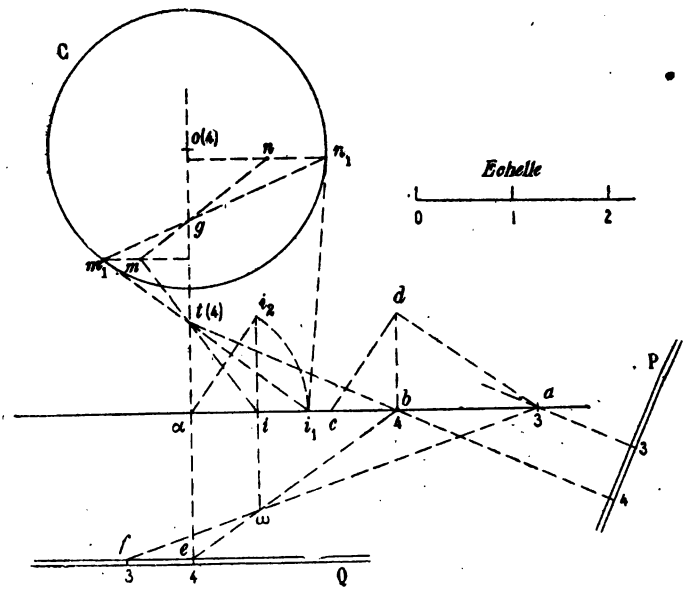


Fig. 88

gent à la sphère définie par son centre $o(4)$ et la projection C de son contour apparent horizontal (*fig.* 88).

Construisons d'abord le plan mené par $o(4)$ perpendiculairement à la droite donnée (I, 76).

La perpendiculaire $o\alpha$ abaissée de o sur ab est la projection horizontale de l'horizontale de cote 4 de ce plan, de sorte qu'après avoir construit l'intervalle bc inverse de celui de la droite AB, on peut construire immédiatement et graduer une échelle de pente Q. Pour obtenir le point d'intersection de la droite AB et du plan Q, on détermine d'abord (I, 66, 3°) le point ω où se coupent les projections af et be des horizontales de cotes 3 et 4 s'appuyant sur AB et sur la ligne de plus grande pente du plan projetée suivant l'échelle de pente Q; en abaissant ensuite la perpendiculaire ωi sur ab, on a la projection i du point cherché ; sa cote s'obtient en le considérant comme appartenant à la droite AB ou au plan Q.

Lorsqu'on rabat le plan Q sur le plan horizontal de cote 4 en le faisant tourner autour de l'horizontale $o(4)e(4)$, le grand cercle Γ d'intersection de ce

plan et de la sphère est rabattu suivant le contour apparent horizontal C ; pour rabattre le point I, on remarque que le triangle rectangle *dbc*, déjà construit, est semblable aux triangles de rabattement des différents points du plan Q, de sorte qu'en menant par le point α, où *ab* rencontre *oe*, la parallèle αi_2 à *cd* jusqu'au point i_2 où elle rencontre ωi, et en portant sur αi la longueur $\alpha i_1 = \alpha i_2$, on a en i_1 le rabattement du point I. Les tangentes menées du point I au grand cercle Γ sont rabattues suivant les tangentes $i_1 m_1$ et $i_1 n_1$ au cercle C ; la première, par exemple, rencontre la charnière au point $t(t_1)$ et se relève, par conséquent, en *it* ; son point de contact M, rabattu en m_1, se relève en *m* et la cote de ce point s'obtient en le considérant comme appartenant au plan Q. L'un des plans tangents cherchés est donc défini par les droites AB et IT, la direction de ses horizontales est *bt* et il est aisé d'en construire une échelle de pente P.

Pour avoir le relèvement du point de contact de la deuxième tangente issue de *i* au cercle Γ, comme la droite $i_1 n_1$ ne rencontre pas la charnière dans les limites de l'épure, nous avons utilisé le relèvement du point m_1 et nous avons ainsi obtenu en *n* la projection du point de contact du deuxième plan tangent.

§ VII.

Sphères circonscrite et inscrite à un tétraèdre.

176. **Problème.** — *Trouver le centre et le rayon de la sphère dont la surface contient les quatre sommets d'un tétraèdre (sphère circonscrite).*

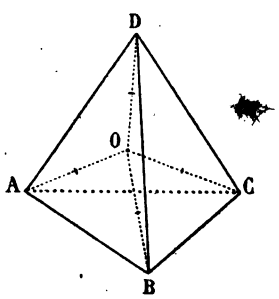


Fig. 89

Solution géométrique. — Le centre O de la sphère circonscrite est équidistant des quatre sommets A, B, C, D du tétraèdre (*fig.* 89). Il est donc dans les plans menés perpendiculairement à chacune des arêtes par leur milieu et aussi sur les droites perpendiculaires au plan de chaque face menées par le centre du cercle circonscrit à cette face.

177. **Solution graphique.** — Soit le tétraèdre défini par les projections (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), (*c*, *c'*), (*d*, *d'*) de ses quatre sommets dont les trois premiers sont dans le plan horizontal (*fig.* 90).

1° *Détermination du centre de la sphère circonscrite.* — Un premier lieu géométrique de ce point est la perpendiculaire au plan du triangle (*abc*, *a'b'c'*) menée par le centre (*e*, *e'*) du cercle circonscrit à ce triangle. Cette droite est verticale puisque le plan du triangle est horizontal.

Un autre lieu du centre est le plan perpendiculaire à l'arête $(da, d'a')$ mené

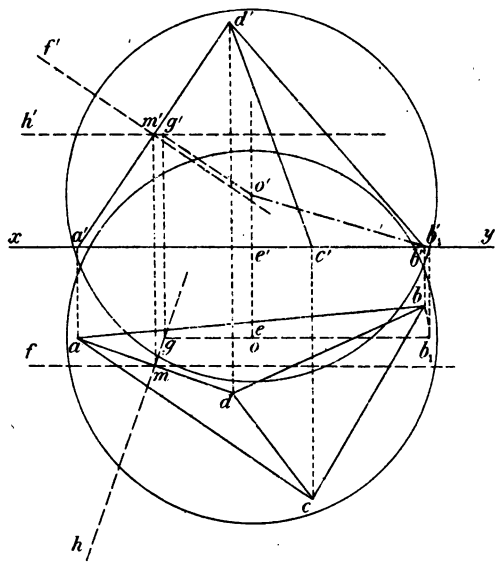


Fig. 90

par le point (m, m'), milieu de cette arête. Ce plan est défini par l'horizontale $(mh, m'h')$ et la frontale $(mf, m'f')$ (I, 172).

Pour trouver l'intersection de ce plan avec la verticale du point (e, e'), on est ramené à trouver la projection verticale o' du point du plan dont la projection horizontale o coïncide avec le point e. A cet effet, on mène la frontale du plan dont la projection horizontale eg passe par e ; le point (g, g') où cette droite rencontre l'horizontale $(mh, m'h')$ permet de définir la projection verticale de cette frontale $g'o'$ qui rencontre la verticale du point (e, e') au point cherché o'. Le centre de la sphère est donc le point (o, o').

2° *Rayon de la sphère.* — On l'obtient en cherchant la distance du point (o, o') à l'un des sommets du tétraèdre, (b, b') par exemple. Pour cela, par une rotation autour de la verticale du point (o, o') on amène le point (b, b') en (b_1, b'_1) ; le rayon est égal à la longueur $o'b'_1$.

On en déduit les deux contours apparents de la sphère.

178. **Problème.** — *Trouver le centre et le rayon de la sphère inscrite à un tétraèdre.*

Solution géométrique. — Le centre O de cette sphère tangente aux plans des quatre faces du tétraèdre est équidistant de leurs quatre plans ; il

est par suite situé dans les plans bissecteurs intérieurs des dièdres du tétraèdre (GRÉVY, *Géométrie*, 388). Si donc parmi les six arêtes du tétraèdre, on en choisit trois qui ne passent pas par le même sommet, les trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres correspondants se coupent en un point qui est le centre O.

179. **Solution graphique.** — Soit le tétraèdre défini par les projections

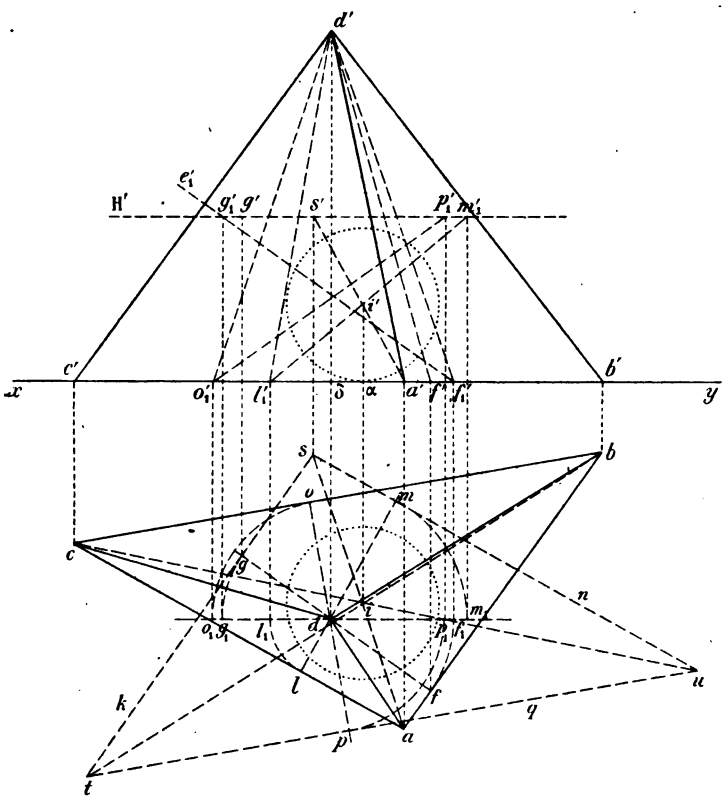


Fig. 91

(a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') de ses quatre sommets, dont les trois premiers sont dans le plan horizontal (*fig.* 91).

1° *Détermination du centre de la sphère inscrite.* — Définissons d'abord les trois plans bissecteurs intérieurs des dièdres d'arêtes $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$. A cet effet, pour obtenir le rectiligne du dièdre $(ab, a'b')$, menons par le som-

met (d, d') le plan vertical df perpendiculaire à l'arête $(ab, a'b')$; rendons ce rectiligne de front par une rotation autour de la verticale du point (d, d'); le point (f, f') vient en (f_1, f'_1) et le rectiligne se projette alors verticalement en vraie grandeur en $\widehat{\delta f'_1 d'}$. Menons alors la bissectrice $f'_1 e'_1$ de cet angle et sur cette droite prenons le point (g_1, g'_1) situé dans le plan horizontal qui a pour trace verticale H'. La rotation inverse de celle qui a été faite ramène ce point dans la position (g, g') et l'horizontale du plan bissecteur située dans le plan H' est projetée horizontalement suivant la droite gk menée par le point g parallèlement à la trace horizontale ab du plan bissecteur.

Des constructions analogues déterminent en $d'l'_1\delta$ et $d'o'_1\delta$ les vraies grandeurs des rectilignes des deux dièdres d'arêtes $(ac, a'c')$ et $(bc, b'c')$; puis en mn et pq les projections horizontales des droites des deux plans bissecteurs situées dans le plan horizontal H'.

En joignant les points a, b, c communs aux horizontales de cote zéro des plans bissecteurs aux points s, t, u communs aux horizontales des mêmes plans situées dans le plan H', on obtient en sa, tb, uc les projections horizontales des intersections de ces plans pris deux à deux. On a une *vérification* de l'exactitude des constructions en constatant que ces trois droites concourent en un point i projection horizontale du point commun aux trois plans bissecteurs, c'est-à-dire du centre de la sphère inscrite.

Le point i se rappelle verticalement en i' sur la droite $s'a'$, projection verticale de sa.

2° *Rayon de la sphère.* — Le rayon de la sphère inscrite est la distance du point (i, i') au plan de l'une quelconque des faces du tétraèdre ; il est donc égal à la longueur $i'\alpha$, distance de ce point au plan horizontal qui contient l'une des faces. On en déduit les deux contours apparents de la sphère.

EXERCICES

1. Trouver les points d'intersection d'une horizontale donnée avec une sphère donnée.

2. Mener à une sphère un plan tangent perpendiculaire : 1° soit à une droite donnée; 2° soit à deux plans donnés non parallèles.

3. Mener à une sphère un plan tangent de pente donnée parallèle à une droite donnée. Nombre de solutions.

4. Mener par un point donné un plan tangent à une sphère et parallèle à une direction donnée.

5. Mener par un point donné un plan tangent à une sphère et perpendiculaire à un plan donné.

6. On donne une sphère et une direction de rayons lumineux. Déterminer un rayon se refléchissant sur la sphère de manière que le rayon réfléchi soit vertical ou, plus généralement, soit perpendiculaire à un plan donné.

7. Trouver sur une sphère donnée les points communs à deux cercles qu'on définit en se donnant leurs plans.

8. On donne deux points (a, a') et (b, b') et une droite $(cd, c'd')$. Trouver sur la droite un point M tel que : $AB = BM$.

(*Navale.*)

9. On donne deux plans et une droite D. Mener par la droite un plan coupant le dièdre formé par les deux plans suivant un angle droit.

(*Saint-Cyr.*)

10. On donne deux points A et B et une droite D. Touver sur cette droite un point M tel : 1° que le triangle AMB soit rectangle en M ; 2° ou qu'on ait la relation : $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 3\overline{AB}^2$; 3° ou qu'on ait : $2MA = 3MB$.

(*Saint-Cyr.*)

11. Intersection d'une sphère, dont les projections des deux contours apparents sont confondues, avec une droite du deuxième plan bissecteur.

12. Par un point A d'une sphère, on mène une droite quelconque qui représente un rayon lumineux tombant sur la sphère au point A. Construire le rayon réfléchi, en supposant la surface de la sphère réfléchissante.

13. Mener une tangente à une sphère passant par un point donné sur cette sphère et rencontrant une droite donnée.

14. Trouver la projection verticale d'une droite passant par un point donné et tangente à une sphère donnée, connaissant la projection horizontale de la droite cherchée.

15. (*Géométrie cotée*). Trouver la graduation d'une droite tangente à une sphère donnée, connaissant sa projection horizontale et sa pente.

16. Construire les points communs à la surface d'une sphère et à une circonférence non située sur cette sphère.

(*Saint-Cyr.*)

17. On donne une sphère O et une droite D. Construire les droites parallèles à une direction Δ qui rencontrent la droite D et telles que le segment compris entre leurs points de rencontre avec D et avec la sphère ait une longueur donnée.

(*Saint-Cyr.*)

18. Mener par un point donné une droite rencontrant une droite donnée et située à une distance donnée d'un point donné.

(*Saint-Cyr.*)

19. Sur la section d'une sphère par un plan P, construire les points qui sont à une distance donnée d'un plan donné Q.

20. Construire l'ombre portée sur une sphère donnée par une droite donnée.

(*Saint-Cyr.*)

21. Construire les projections d'un cube connaissant deux sommets (a, a') et (g, g') situés aux extrémités d'une de ses diagonales et un point (m, m') qui appartient à l'une des faces du cube passant par le sommet (a, a').

(*Saint-Cyr.*)

22. Un plan est défini par une horizontale et une frontale qui se coupent au point (o, o') ; ce point est le centre d'un cercle de rayon donné situé dans le plan. On demande de construire les contours apparents d'une sphère passant par ce cercle et tangente à la ligne de terre.

(*Saint-Cyr.*)

23. Faire tourner autour d'un axe donné dans le plan horizontal un segment rectiligne donné dans le même plan jusqu'à ce qu'il soit vu sous un angle droit d'un point donné.

(*Baccalauréat.*)

24. Sur une sphère donnée on prend deux points A et B, trouver un troisième point C sur la même sphère, de façon que le triangle ABC soit équilatéral.

25. Construire les sphères passant par trois points donnés et tangentes au plan horizontal.

(*Saint-Cyr.*)

26. On donne une pyramide triangulaire ayant sa base dans le plan horizontal. On la coupe par un plan horizontal. A quelle condition peut-on faire passer une sphère par les sommets du tronc de pyramide ainsi obtenu ? Construire cette sphère en supposant la condition remplie.

27. 1° Construire les contours apparents d'une sphère de rayon donné, tangente à la ligne de terre, connaissant le rayon de la section déterminée sur elle par le plan horizontal de projection. 2° Construire l'intersection de la sphère avec le premier bissecteur.

(*Saint-Cyr.*)

28. Construire les contours apparents d'une sphère sachant qu'elle est tangente au plan vertical et qu'elle coupe le plan horizontal suivant un cercle donné.

(*Saint-Cyr.*)

29. On donne le rabattement sur le plan horizontal d'un cercle situé dans un plan donné PαQ. Construire une sphère passant par ce cercle et tangente au plan horizontal.

(*Saint-Cyr.*)

30. Mener à une sphère les plans tangents par une droite parallèle à la ligne de terre.

31. Mener dans une sphère dont le centre est dans le plan horizontal une corde parallèle à une droite de front donnée, de longueur donnée et dont l'une des extrémités est dans le plan horizontal.

32. Construire un tétraèdre connaissant sa base ABC dans le plan horizontal, la cote du sommet S et sachant que les arêtes SA, SB, SC ont des longueurs proportionnelles à trois nombres donnés *m*, *n*, *p*. (*Saint-Cyr.*)

33. On donne une sphère et une droite. Mener par la droite les plans coupant la sphère suivant un cercle de rayon donné.

(*Saint-Cyr.*)

34. On donne trois points dans un plan de profil. Construire les contours apparents d'une sphère passant par ces trois points et tangente à un deuxième plan de profil donné.

35. On donne trois points par leurs projections. Trouver un point situé à une même distance donnée de chacun des trois premiers.

36. On donne deux droites parallèles dans le plan horizontal de projection et un point (a, a'). Construire les contours apparents d'une sphère de rayon donné passant par le point et tangente aux deux droites. (*Saint-Cyr.*)

37. Construire une sphère de rayon donné tangente au plan horizontal et à un plan P donné par son échelle de pente, et passant par un point donné. (*Saint-Cyr.*)

38. On donne deux plans dont les échelles de pente sont parallèles. Construire les sphères tangentes à ces deux plans et au plan de comparaison, et passant par un point donné.

39. Construire les sphères tangentes aux deux plans de projection et à un plan de profil donné, et passant par un point donné.

40. Construire les contours apparents d'une sphère tangente à deux droites données en deux points donnés.

(*Saint-Cyr.*)

41. Trouver les projections de l'intersection de deux sphères définies par leurs centres et leurs rayons. (On détermine d'abord le plan du cercle d'intersection et on est ramené à la construction d'une section plane).

42. On donne deux sphères S et S'. Par un point donné mener un plan coupant chacune des deux sphères suivant des cercles de rayon donné. (*Saint-Cyr.*)

43. On donne deux segments rectilignes (ab, $a'b'$) et (cd, $c'd'$). Représenter les projections du lieu des points d'où on les voit tous deux sous un angle droit. (*Saint-Cyr.*)

44. On donne trois segments rectilignes (ab, $a'b'$), (cd, $c'd'$), (ef, $e'f'$) ; construire les points d'où on voit ces segments sous un angle droit.

45. Déterminer les points d'un plan donné situés à des distances données de deux points pris hors du plan. (*Saint-Cyr.*)

46. Déterminer un point connaissant ses distances à deux points donnés et à un plan donné. (*Saint-Cyr.*)

47. Construire une sphère tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche. (*Saint-Cyr.*)

CHAPITRE VIII

CÔNE ET CYLINDRE A DIRECTRICE CIRCULAIRE

§ I.

Propriétés géométriques du cône.

180. Définition. — On appelle *cône* ou *surface conique* la surface engendrée par une droite mobile SA (*fig.* 92), dite *génératrice*, qui passe constamment par un point fixe S appelé *sommet* et qui rencontre une courbe (C) nommée *directrice* ou *base*.

La directrice peut être une courbe quelconque, plane ou gauche. Nous nous bornerons au cas où elle est un cercle. C'est le cas du *cône à directrice circulaire*. Nous supposerons en outre le sommet S du cône hors du plan P de ce cercle, pour éviter le cas où la surface conique se réduit au plan du cercle (*fig.* 93).

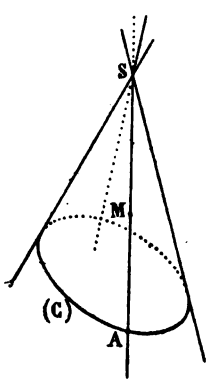


Fig. 92

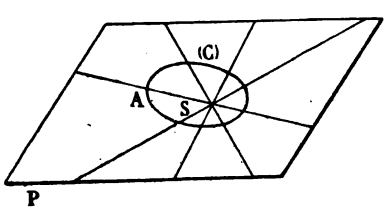


Fig. 93

Le choix d'une directrice circulaire est surtout commode pour l'exécution pratique des constructions ; il n'est pas indispensable pour la démonstration des théorèmes suivants, qui subsistent comme

le lecteur s'en apercevra facilement, si la directrice est une courbe plane quelconque.

181. Par un point quelconque M (*fig.* 92) de la surface d'un cône, distinct du sommet, passe une génératrice et une seule ; on l'obtient en joignant le point M au sommet S. D'après la définition du cône, cette génératrice rencontre la base du cône en un point A.

182. **Plan tangent. — Théorème.** — *On peut tracer sur la surface d'un cône une infinité de courbes passant par un même point* M ; *les tangentes en* M *à toutes ces courbes sont dans un même plan qu'on appelle* PLAN TANGENT *au cône au point* M.

Soit un cône de sommet S (*fig.* 94), de directrice (C) et M un point de la surface du cône. La génératrice SM du point M rencontre la directrice au point A.

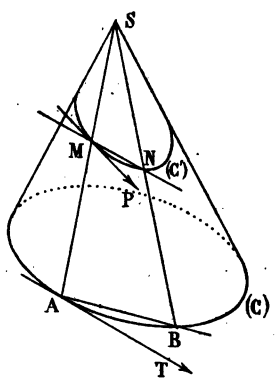


Fig. 94

Traçons sur la surface du cône une courbe *quelconque* (C'), plane ou gauche, passant par M. La tangente à (C') au point M est, par *définition*, la position limite d'une sécante MN à cette courbe, lorsqu'elle tourne autour du point fixe M de façon que le point N vienne se confondre avec M.

Menons la génératrice SN du point N qui coupe la directrice au point B. Les deux droites MN et AB se trouvent dans le plan des génératrices concourantes SA et SB.

Si, M restant fixe, N se déplace sur (C') et se rapproche de M, le point B se déplace sur (C) et se rapproche de A ; les sécantes MN et AB ont respectivement pour limites les tangentes MP et AT aux courbes (C') et (C), qui se trouvent dans le plan SAT, position limite du plan SAB.

Or, ce plan SAT dépend du point M, mais est indépendant de a courbe (C'), ce qui démontre le théorème.

183. REMARQUE. — Si on considère une courbe C' (*fig.* 95), tracée

sur le cône et passant par son sommet, la sécante SN à cette courbe est une génératrice ; si le point N tend vers S, SN a pour limite la tangente ST à la courbe; cette tangente est donc une génératrice du cône. Le lieu de ces tangentes est la surface du cône. Au sommet, il n'y a donc plus de plan tangent, mais un cône de tangentes.

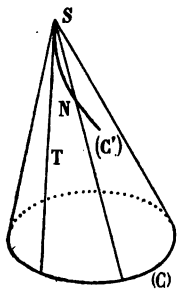


Fig. 95

184. Corollaire I. — Du théorème précédent il résulte que *le plan tangent en un point de la surface d'un cône, distinct du sommet est déterminé :*

1° *par la génératrice de ce point;*

2° *par la tangente à la directrice au point situé sur cette génératrice.*

185. Corollaire II. — *Le plan tangent à un cône est le même en tout point d'une même génératrice.*

En effet les deux droites qui servent à définir le plan tangent (184) dépendent *uniquement* de la génératrice et non du point considéré sur elle.

186. Corollaire III. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un plan soit tangent à un cône sont :*

1° *que ce plan contienne le sommet du cône ;*

2° *que sa trace sur le plan de la directrice soit tangente à cette courbe.*

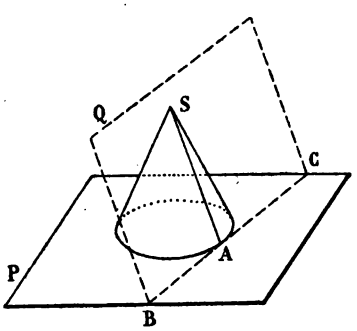


Fig. 96

Les conditions sont *nécessaires*, d'après le corollaire I (184).

Elles sont *suffisantes*, car si un plan Q (*fig.* 96) contient le sommet S et si sa trace BC sur le plan P de la base est tangente à cette base en A, il a deux droites communes avec le plan tangent au cône au point A et par suite est confondu avec lui.

§ II.

Propriétés géométriques du cylindre.

187. Définition. — On appelle *cylindre* ou *surface cylindrique* la surface engendrée par une droite mobile AM (*fig.* 97), dite *génératrice*, qui reste parallèle à une direction fixe Δ et qui rencontre une courbe (C) appelée *directrice* ou *base*.

La directrice peut être une courbe quelconque, plane ou gauche. Nous supposerons dans tout ce qui suit qu'elle est un cercle : c'est le

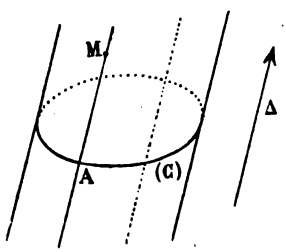


Fig. 97

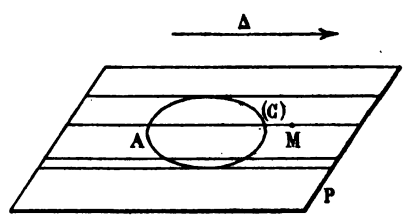


Fig. 98

cas du *cylindre à directrice circulaire*. Nous supposerons en outre que la direction Δ des génératrices n'est pas parallèle au plan P de ce cercle, pour éviter le cas où le cylindre se réduit au plan du cercle (*fig.* 98).

Le choix d'une directrice circulaire est surtout commode pour l'exécution pratique des constructions ; il n'est pas indispensable pour la démonstration des théorèmes suivants qui subsistent, comme le lecteur s'en apercevra facilement, si la directrice est une courbe plane quelconque.

188. Par un point quelconque M (*fig.* 97) de la surface du cylindre passe une génératrice et une seule ; on l'obtient en menant par M la parallèle à la direction Δ des génératrices. D'après la définition du cylindre (187), cette génératrice rencontre la base en un point A.

189. Plan tangent. — Théorème. — *On peut tracer sur la sur-*

face d'un cylindre une infinité de courbes passant par un même point M ; *les tangentes en* M *à toutes ces courbes sont dans un même plan, qu'on appelle* PLAN TANGENT *au cylindre au point* M.

Soient un cylindre de génératrices parallèles à la droite Δ (*fig.* 99), de directrice (C) et M un point de la surface du cylindre. La génératrice GM du point M rencontre la directrice au point A. Traçons sur la surface du cylindre une courbe *quelconque* (C'), plane ou gauche, passant par M. La tangente à (C') au point M est, *par définition,* la position limite d'une sécante MN à cette courbe, lorsqu'elle tourne autour du point fixe M de façon que le point N vienne se confondre avec M.

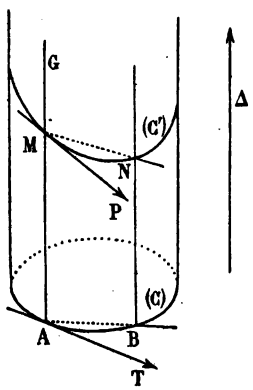


Fig. 99

Menons la génératrice NB du point N qui coupe la directrice au point B. Les deux droites MN et AB se trouvent dans le plan des deux génératrices parallèles MA et NB.

Si, M restant fixe, N se déplace sur la courbe (C') et se rapproche de M, le point B se déplace sur (C) et se rapproche de A ; les sécantes MN et AB ont respectivement pour limites les tangentes MP et AT aux courbes (C') et (C), qui se trouvent dans le plan MAT, position limite du plan MNBA.

Or ce plan MAT dépend du point M, mais est indépendant de la courbe (C'), ce qui démontre le théorème.

190. Corollaire I. — *Le plan tangent en un point de la surface d'un cylindre est déterminé :*

1° *par la génératrice de ce point;*

2° *par la tangente à la directrice au point situé sur cette génératrice.*

191. Corollaire II. — *Le plan tangent à un cylindre est le même en tout point d'une même génératrice.*

En effet, les deux droites qui servent à déterminer le plan tangent (190) dépendent *uniquement* de la génératrice et non du point considéré sur elle.

192. Corollaire III. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un plan soit tangent à un cylindre sont :*

1° *que ce plan soit parallèle à la direction des génératrices ;*

2° *que sa trace sur le plan de la directrice soit tangente à cette courbe.*

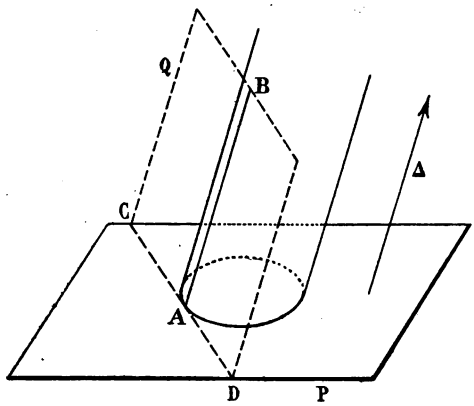


Fig. 100

Les conditions sont *nécessaires*, d'après le corollaire I (190).

Elles sont *suffisantes*, car si un plan Q (*fig.* 100) est parallèle à la direction Δ des génératrices et si sa trace CD sur le plan P de la base est tangente à cette base en A, il a deux droites communes avec le plan tangent au cylindre au point A (190) et par suite est confondu avec lui.

193. Remarque. — On peut regarder un cylindre comme un cône dont le sommet est rejeté à l'infini dans la direction des génératrices. Les résultats relatifs au cylindre se déduisent, *en général*, de ceux qu'on a obtenus pour le cône, en considérant le cylindre comme la surface limite d'un cône dont le sommet s'éloigne à l'infini.

§ III.

Détermination d'un point d'une surface conique ou cylindrique.

194. Problème I. — *Un cône est défini par son sommet et sa directrice circulaire. Connaissant l'une des deux projections d'un point de sa surface, trouver l'autre (ou bien connaissant la projection horizontale d'un point, trouver sa cote).*

MÉTHODE. — *On détermine les projections (ou la projection cotée) de la génératrice passant par le point cherché et on est ramené à un problème connu* (I, 95) : déterminer sur une droite connue un point dont on se donne l'une des projections.

195. Premier exemple. — La base du cône est un cercle de centre (o, o') situé dans le plan horizontal, et le sommet est le point (s, s') (*fig.* 101).

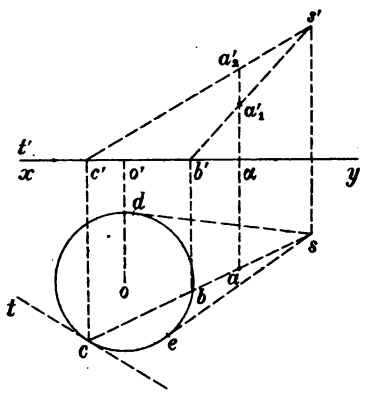


Fig. 101

1° Soit à trouver les projections verticales des points du cône dont la projection horizontale est un point donné a.

La génératrice du point cherché est projetée horizontalement suivant sa (181), elle rencontre la directrice aux points b et c, dont les projections verticales b' et c', situées sur la ligne de terre (I, 90), déterminent les génératrices $(sb, s'b')$, $(sc, s'c')$ qui passent par les points cherchés. La ligne de rappel aa du point a détermine en a'_1 et a'_2 les projections verticales cherchées.

196. La construction ne donne de solution que si la droite sa coupe la circonférence o, ce qui exige que le point a soit dans l'angle dse formé par les tangentes menées par le point s à la circonférence o ou dans l'angle opposé par le sommet. Les points de la surface du cône se projettent donc horizontalement à l'intérieur de l'angle dse ; c'est pour cette raison qu'on dit que les deux droites sd et se forment le *contour apparent horizontal du cône* Nous reviendrons plus loin sur cette notion (258).

197. 2° Soit maintenant à trouver la projection horizontale d'un point du cône dont on donne la projection verticale en m' (*fig.* 102).

La génératrice du point cherché a pour projection verticale $s'm'$ (181) qui rencontre la directrice aux points (n', n_1), (n', n_2), car sa trace horizontale a sa projection verticale sur xy et sa projection

horizontale sur la circonférence o. Les génératrices des points cherchés sont donc les droites (sn_1, $s'n'$) et (sn_2, $s'n'$), dont les intersections m_1 et m_2 avec la ligne de rappel $m'\mu$ du point m' sont les projections horizontales demandées.

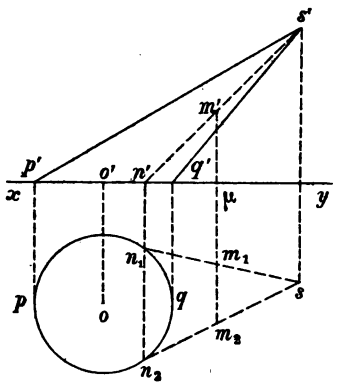


Fig. 102

198. Le problème admet deux solutions si la droite $s'm'$ rencontre le segment $p'q'$, projection verticale de la circonférence o. Par suite, les projections verticales des points de la surface du cône se trouvent à l'intérieur de l'angle $p's'q'$ ou de son opposé par le sommet ; c'est pour cette raison qu'on dit que les deux droites $s'p'$, $s'q'$ forment le *contour apparent vertical du cône*. Nous reviendrons plus loin (258) sur cette notion.

199. Remarque. — Les problèmes qui viennent d'être traités peuvent encore s'énoncer :

Trouver les points d'intersection de la surface d'un cône avec une droite verticale, celle qui a pour trace horizontale le point a (195, *fig.* 101), ou avec une *droite de bout*, celle qui a pour trace verticale le point m' (197, *fig.* 102).

200. **Deuxième exemple** (*Géométrie cotée*). — La base du cône est un cercle o du plan horizontal de cote 2, le sommet est le point $s(8)$. Trouver les cotes des points de la surface du cône projetés en a (*fig.* 103).

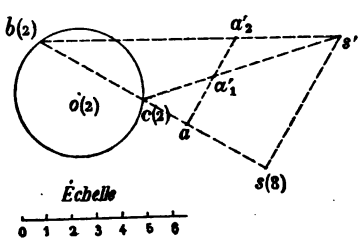


Fig. 103

La génératrice du point a se projette suivant sa, qui coupe la base (181) aux points $b(2)$ et $c(2)$. On est ramené à trouver sur les droites $s(8)b(2)$ et $s(8)c(2)$ la cote du point projeté en a. Pour cela (I, 18), on

rabat le plan vertical de trace sb sur le plan horizontal de cote 2. Les points $b(2)$ et $c(2)$ situés sur la charnière ne bougent pas, le point $s(8)$ se rabat au point s', à une distance de la charnière égale à six unités de l'échelle. Le point projeté en a se rabat en a'_1 ou a'_2 à l'intersection des génératrices rabattues en $s'b$ et $s'c$ et de la perpendiculaire à la charnière menée par a. En mesurant à l'échelle les longueurs aa'_1 et aa'_2, on obtient les cotes des points cherchés, comptées à partir du plan horizontal de cote 2.

201. Remarque. — Si l'on avait à répéter le problème précédent pour différents points, il y aurait intérêt, pour éviter de rabattre de nombreux plans verticaux, à projeter la figure sur un plan vertical, ce qui ramènerait aux constructions du premier exemple traité (195).

202. **Troisième exemple.** — La base du cône est un cercle de rayon

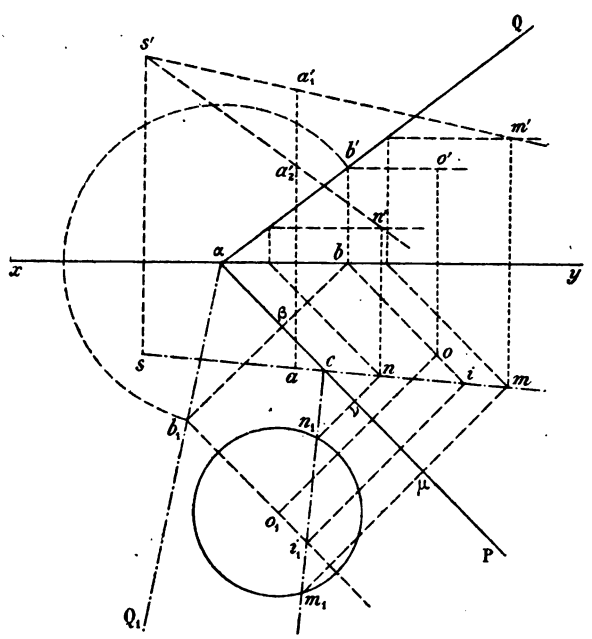


Fig. 104

donné, situé dans un plan donné par ses traces PαQ ; la projection horizon-

tale du centre est un point donné o. Le sommet du cône est le point (s, s') (*fig.* 104).

Soit à trouver la projection verticale d'un point de la surface du cône dont la projection horizontale est le point a.

La génératrice du point cherché est projetée horizontalement suivant sa; pour trouver ses points de rencontre avec la directrice du cône, on est ramené à trouver les points où la droite sa coupe l'ellipse projection de la directrice. Pour cela, on rabat le plan $P\alpha Q$ sur le plan horizontal de projection et on cherche les points communs aux rabattements du cercle et de la droite de ce plan qui se projette horizontalement suivant sa. On applique les constructions déjà indiquées (I, 183). On mène l'horizontale du centre $(bo, b'o')$; le point (b, b') se rabat en b_1 à l'intersection de la perpendiculaire $b\beta$ à la charnière αP et de la circonférence de centre α et de rayon $\alpha b'$. L'horizontale $(bo, b'o')$ se rabat suivant la parallèle à αP menée par b_1; les points projetés horizontalement en o et i ont pour rabattements les points o_1 et i_1 et la droite du plan projetée suivant sa se rabat en ci_1, car c situé sur la charnière ne bouge pas.

En traçant la circonférence de centre o_1 avec le rayon donné, on obtient le rabattement de la directrice qui coupe la droite ci_1 aux points m_1 et n_1, rabattements des points cherchés, dont les relèvements s'obtiennent en m et n (I, 187) à l'intersection de sa et des perpendiculaires $m_1\mu$ et $n_1\nu$ menées à la charnière par m_1 et n_1. On obtient les projections verticales m' et n' de ces deux points à l'aide des horizontales passant par ces points. Les génératrices du cône projetées horizontalement suivant sa ont pour projections verticales $s'm'$ et $s'n'$, qui coupent en a'_1 et a'_2 la ligne de rappel du point a. Les points cherchés sont (a, a'_1) et (a, a'_2).

Une construction analogue conduit à la projection horizontale d'un point de la surface du cône dont la projection verticale est donnée.

203. **Problème II.** — *Un cylindre est défini par la direction de ses génératrices et sa directrice circulaire. Connaissant l'une des deux projections d'un point de sa surface, trouver l'autre (ou bien connaissant la projection horizontale d'un point, trouver sa cote).*

Méthode. — *On détermine les projections (ou la projection cotée) de la génératrice passant par le point et on est ramené à un problème connu* (I, 95) : déterminer sur une droite connue un point dont on se donne l'une des projections.

204. **Premier exemple.** — La direction des génératrices est (D, D') (*fig.* 105) ; la base est un cercle de centre (o, o'), situé dans un plan de front F et dont le rayon est donné.

La base du cylindre étant dans le plan de front F, se

projette verticalement en vraie grandeur, suivant la circonférence o' et horizontalement suivant un segment pq, égal à son diamètre (102).

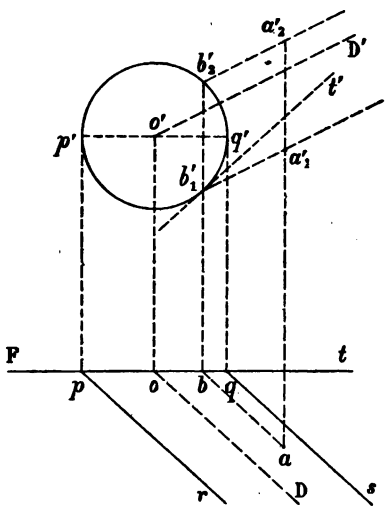


Fig. 105

1° Soit à trouver la projection verticale des points de la surface du cylindre dont la projection horizontale est le point a.

La génératrice des points cherchés a pour projection horizontale la parallèle à D menée par le point a ; elle rencontre la projection horizontale de la directrice au point b, auquel correspondent deux projections verticales b'_1 et b'_2 sur la projection verticale du cercle de base. En menant par b'_1 et b'_2 les parallèles à D', on définit les projections verticales des génératrices qui coupent la ligne de rappel du point a aux points cherchés a'_1 et a'_2, qui avec a définissent deux points de la surface du cylindre.

205. La construction ne donne de solution que si la parallèle à D menée par le point a coupe le segment pq, ce qui exige que le point a se trouve entre les deux parallèles pr et qs menées à D par les points p et q. Les points de la surface du cylindre se projettent donc horizontalement entre ces deux parallèles ; c'est pour cette raison qu'on dit que les deux droites pq et rs forment le *contour apparent horizontal du cylindre*. Nous reviendrons plus loin (258) sur cette notion.

206. 2° Soit à trouver la projection horizontale des points du cylindre dont la projection verticale est le point m'. (*fig.* 106).

La génératrice des points cherchés a pour projection verticale la parallèle à D' menée par m' ; elle rencontre la projection verticale

de la base aux points e' et f' auxquels correspondent les projections horizontales e et f sur la projection horizontale pq de la base. En menant par e et f les parallèles à D, on définit les projections horizontales des génératrices des points (e, e') et (f, f') qui coupent la ligne de rappel du point m aux points m_1 et m_2, projections horizontales des points cherchés.

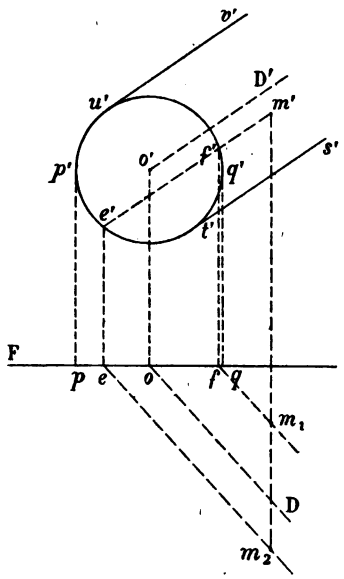


Fig. 106

207. La construction ne donne de solution que si la parallèle à D' menée par m' coupe la circonférence o', ce qui exige que le point m' se trouve entre les deux tangentes $u'v'$ et $t's'$ menées à la circonférence o' parallèlement à D'. Les points de la surface du cylindre se projettent donc verticalement entre les droites $u'v'$ et $t's'$; c'est pour cette raison qu'on dit que ces deux droites forment le *contour apparent vertical du cylindre*. Nous reviendrons plus loin (258) sur cette notion.

208. Remarque. — On remarque que les deux problèmes qui viennent d'être traités peuvent s'énoncer : *Trouver l'intersection avec la surface d'un cylindre*, soit *d'une droite verticale*, celle qui a pour trace horizontale le point a (204, *fig.* 105), soit *d'une droite de bout*, celle qui a pour trace verticale m' (206, *fig.* 106).

209. **Deuxième exemple** (*Géométrie cotée*). — Un cylindre a pour base dans un plan P défini par son échelle de pente (*fig.* 107) une courbe projetée horizontalement suivant un cercle de centre o et de rayon donné. Ses génératrices sont parallèles à la droite $a(0)b(1)$. Soit à trouver la cote des points du cylindre projetés horizontalement en un point donné m.

La génératrice du point cherché se projette suivant la parallèle à ab menée par $m(1, 31)$; elle rencontre la projection de la base aux points c et d, qu'on

cote comme appartenant au plan P, d'où les points $c(2,8)$ et $d(0,8)$. Il faut maintenant chercher les cotes des points des droites parallèles à $a(0)b(1)$ menées par $d(0,8)$ et $c(2,8)$ et dont la projection horizontale est au point m. A cet effet, rabattons sur le plan horizontal de projection le plan vertical de trace cd.

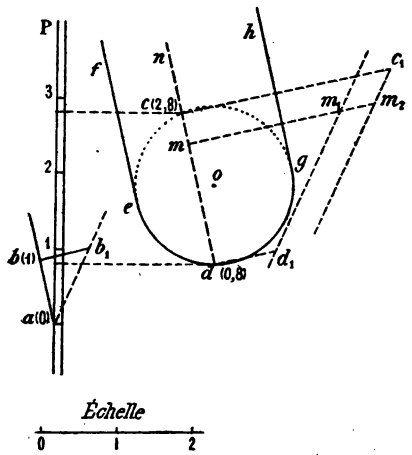


Fig. 107

Les points $c(2,8)$ et $d(0,8)$ viennent en c_1 et d_1 à une distance de la charnière égale à leur cote. Si on rabat sur le plan de comparaison le plan vertical de trace ab qui projette horizontalement la direction des génératrices $a(0)b(1)$, on obtient en ab_1 la direction du rabattement des génératrices ; comme les plans verticaux cd et ba sont parallèles, les rabattements des génératrices des points $c(2,8)$ et $d(0,8)$ s'obtiennent en menant par c_1 et d_1 les parallèles à ab_1. La perpendiculaire menée par m à la charnière cd les coupe en m_1 et m_2 et les cotes des points cherchés sont les longueurs mm_1 et mm_2.

210. Remarques. — Les projections des points du cylindre se trouvent entre les tangentes ef et gh à la projection de sa base menées parallèlement à la droite ab. Ces deux droites forment le *contour apparent horizontal* du cylindre.

211. La base du cylindre précédent est la courbe d'intersection du plan P et du cylindre qui a pour directrice la circonférence o et dont les génératrices sont verticales. D'après le théorème de Dandelin, cette intersection est une ellipse.

212. Troisième exemple. — Le cylindre a ses génératrices verticales, sa base est une circonférence o du plan horizontal (*fig.* 108).

La base est projetée horizontalement en vraie grandeur et verticalement sur la ligne de terre suivant un segment $a'b'$ égal à son diamètre (102).

Tout point du cylindre se projette horizontalement suivant la trace horizontale de la verticale de ce point, qui est la génératrice du point; sa projection se trouve par suite sur la circonférence o (188).

Il résulte de là que la projection horizontale m d'un point du cylindre ne définit plus un ou plusieurs points du cylindre, mais tous les points d'une génératrice verticale (mn, $m'n'$).

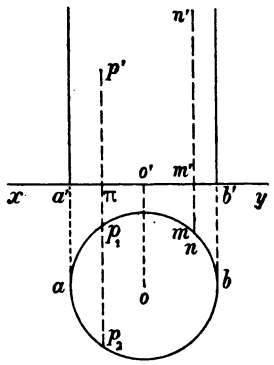


Fig. 108

Au contraire, à la projection verticale p' d'un point de la surface du cylindre correspondent deux projections horizontales p_1 et p_2 à l'intersection de la ligne de rappel $p'\pi$ du point p' et de la circonférence de base o, lieu des projections horizontales des points du cylindre.

Remarques. — I. Toute courbe tracée sur le cylindre, et en particulier sa section par un plan *quelconque*, a par suite pour projection horizontale le cercle de base.

II. — Des résultats analogues se présentent pour les cylindres à génératrices de bout.

§ IV.

Intersection d'une droite et d'une surface conique ou cylindrique.

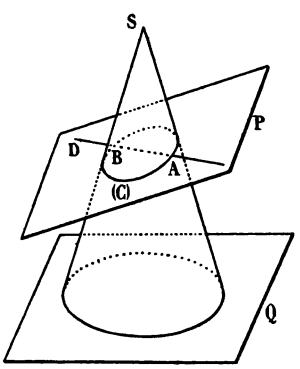


Fig. 109

213. Méthode générale. — *Pour trouver les points communs à une droite* D *et à une surface conique ou cylindrique :*

1° *On fait passer par la droite un plan auxiliaire* P (*fig.* 109);

2° *On construit la courbe* (C) *d'intersection de la surface et de ce plan;*

3° *Les points* A *et* B *communs à cette courbe et à la droite* D *sont les points cherchés.*

214. Pour obtenir une courbe d'intersection (C) facile à construire, on prend comme plan auxiliaire P, dans le *cas du cône*, celui qui passe par le sommet du cône ; il coupe par suite le cône suivant deux génératrices qu'on définit en cherchant les points M et N communs (*fig.* 110) à la base du cône et à la droite d'intersection AB du plan auxiliaire P et du plan de base Q. Les génératrices SM et SN du cône coupent la droite D aux points cherchés E et F.

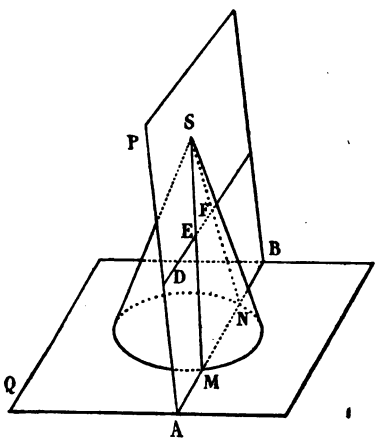


Fig. 110

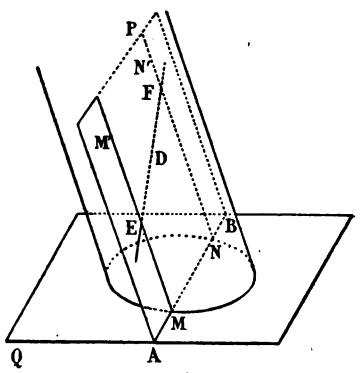


Fig. 111

215. Dans le *cas du cylindre*, on prend comme plan auxiliaire le plan P mené par la droite D parallèlement aux génératrices du cylindre. Ce plan coupe le cylindre suivant deux génératrices qu'on définit en cherchant la trace AB (*fig.* 111) du plan P sur le plan Q de la base du cylindre et en prenant les points M et N communs à la droite AB et à la base. Les génératrices du cylindre MM' et NN', qui passent par M et N, coupent la droite D aux points cherchés E et F.

216. Remarques. — I. Cette méthode est identique à celle qui a été suivie (I, 296) pour trouver l'intersection d'une droite avec la surface d'une pyramide ou d'un prisme. Il suffit de remplacer la base de la pyramide ou du prisme, qui est un polygone, par le cercle de base du cône ou du cylindre.

217. II. — On vient d'indiquer incidemment (214 et 215) la solution des problèmes suivants :

Trouver l'intersection :

1° *d'un cône et d'un plan* P *passant par le sommet du cône* (*fig.* 110);

2° *d'un cylindre et d'un plan* P *parallèle à la direction de ses génératrices* (*fig.* 111).

218. Premier exemple. — Soit à trouver les points communs à la droite (*ef*, *e'f'*) et à la surface du cône de sommet (*s*, *s'*) dont la

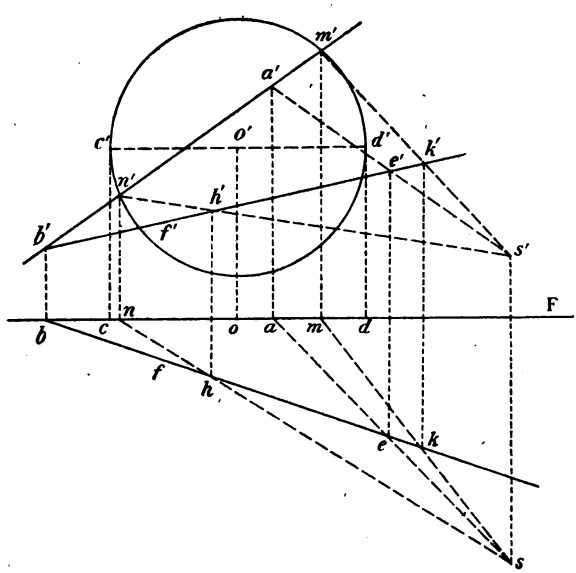


Fig. 112

base dans le plan de front F est un cercle de centre (*o*, *o'*) et de rayon donné (*fig.* 112).

La base du cône se projette verticalement en vraie grandeur suivant un cercle de centre *o'* et de rayon égal au rayon donné ; sa projection horizontale est le segment *cd*, projection du diamètre horizontal (*cd*, *c'd'*) de la base (102).

Considérons le plan auxiliaire (214) défini par le sommet (*s*, *s'*) et la droite donnée (*ef*, *e'f'*). Pour obtenir la trace de ce plan sur le plan de base F, nous avons cherché (I, 114) les traces (*a*, *a'*) et *b*, *b'*) des deux droites (*ef*, *e'f'*) et (*se*, *s'e'*) du plan auxiliaire. La

trace du plan auxiliaire sur le plan de base, qui est la droite $(ab, a'b')$, rencontre cette base aux points (m, m') et (n, n') ; en joignant ces points au sommet (s, s') du cône, on obtient les génératrices $(sm, s'm')$, $(sn, s'n')$ d'intersection du cône et du plan auxiliaire qui coupent la droite donnée $(ef, e'f')$ aux points cherchés (h, h') et (k, k').

Comme vérification des constructions, les deux droites hh' et kk' doivent être parallèles aux lignes de rappel.

219. Deuxième exemple (*Géométrie cotée*). — Soit à trouver les points communs à la droite $a(0)b(2)$ (*fig.* 113) et au cône de sommet $s(10)$ qui a pour base horizontale une circonférence de centre $c(0)$ et de rayon donné.

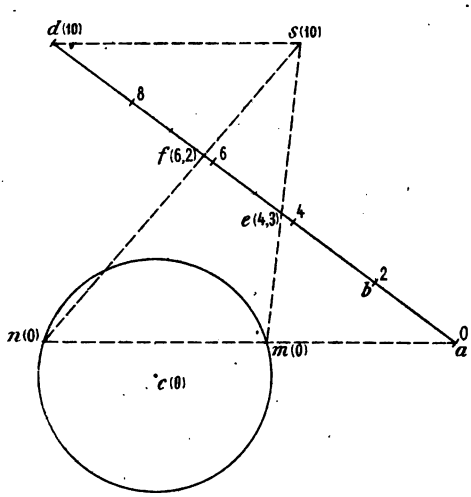


Fig. 113

Considérons (214) le plan défini par le point $s(10)$ et la droite $a(0)b(2)$, et cherchons sa trace sur le plan de base du cône, qui est ici le plan de comparaison. Cette trace passe par le point $a(0)$, trace de la droite, et sa direction est celle des horizontales du plan qu'on obtient en $s(10)d(10)$ en cherchant sur la droite $a(0)b(2)$, à l'aide de sa graduation, le point $d(10)$ qui a même cote que le sommet du cône. La trace cherchée est donc la parallèle amn menée par a à la droite sd. Elle coupe la base du cône aux points m et n ; les génératrices d'intersection du cône et du plan auxiliaire sont donc les droites $s(10)m(0)$ et $s(10)n(0)$ qui coupent la droite ab aux points e et f dont on détermine les cotes en les considérant comme situés sur la droite $a(0)b(2)$ (approximativement on trouve 4,3 pour e et 6,2 pour f).

220. Troisième exemple. — Soit à trouver les points communs à une droite donnée $(ab, a'b')$ (*fig.* 114) et à la surface d'un cylindre à génératrices verticales, dont la base est une circonférence o du plan horizontal.

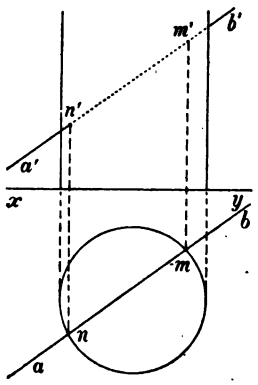


Fig. 114

Nous avons vu (212) que la projection horizontale de tout point d'un tel cylindre se trouve sur la projection horizontale de la base ; par suite, les points cherchés ont leur projection horizontale en m et n à l'intersection de la base du cylindre et de la projection horizontale de la droite ab ; en les rappelant sur la droite $a'b'$, on obtient les points demandés (m, m') et (n, n').

Remarque. — On arrive aux mêmes constructions en utilisant le plan auxiliaire mené parallèlement aux génératrices par la droite $(ab, a'b')$ (215).

221. Quatrième exemple. — Soit à trouver les points communs à la droite $(ab, a'b')$ (*fig.* 115) et au cylindre de génératrices parallèles à la droite (D, D') et dont la base est un cercle de rayon donné, situé dans un plan défini par ses traces PαQ ; le centre de cette base est projeté horizontalement en un point donné o.

Menons par le point (a, a') la parallèle $(ac, a'c')$ à la direction (D, D') des génératrices du cylindre ; nous définissons ainsi le plan auxiliaire $(abc, a'b'c')$ dont on trouve l'intersection avec le plan de base PαQ en appliquant la méthode générale (I, 148) ; nous avons utilisé comme plans auxiliaires :

1° le plan horizontal de projection, coupant les plans suivant les droites (αP, αy) et $(ef, e'f')$ qui donnent le point (g, g') de l'intersection ;

2° le plan de bout de trace verticale $a'c'$, qui projette verticalement la droite $(ac, a'c')$; il coupe les plans suivant les droites $(ji, j'i')$ et $(ac, a'c')$ qui se coupent au point (h, h'). On obtient ainsi la droite $(gh, g'h')$ intersection des deux plans.

Pour trouver l'intersection de cette droite et du cercle de base, on rabat le plan PαQ sur le plan horizontal de projection (I, 183).

L'horizontale du centre $(om, o'm')$ se rabat suivant la droite m_1o_1 menée parallèlement à la charnière αP par le point m_1 commun à la droite $m\mu$ et à la circonférence de centre α et de rayon $\alpha m'$. Le rabattement du centre est à l'intersection de cette droite et de la perpendiculaire $o\omega$ menée par o à la charnière. En traçant de o_1 comme centre une circonférence de rayon égal au rayon donné de la base, on obtient le rabattement de la base.

Le rabattement de la droite $(gh, g'h')$ s'obtient en gk_1 en remarquant que le point g' situé sur la charnière ne bouge pas et que le point projeté horizon-

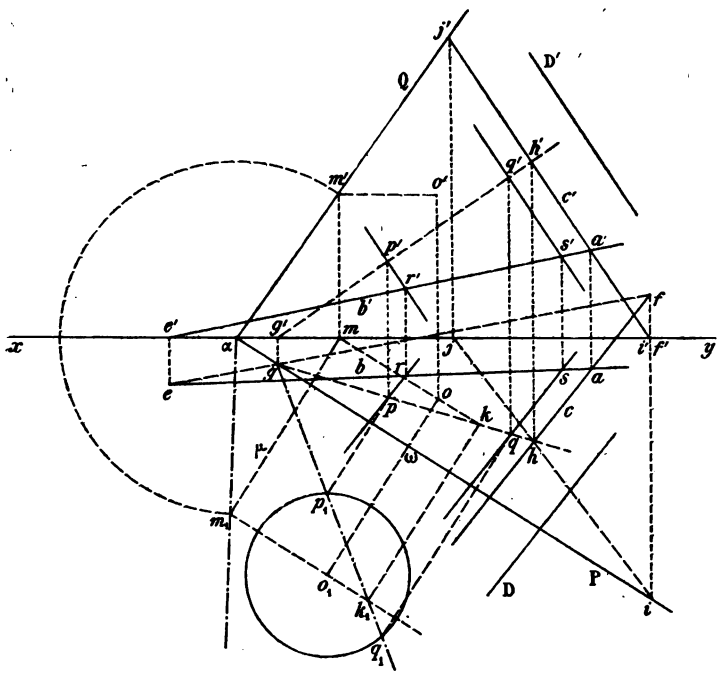


Fig. 115

talement en k sur l'horizontale du point (o, o') se rabat en k_1 sur la droite o_1m_1.

Les points p_1 et q_1 communs à gh_1 et au rabattement de la base se relèvent en (p, p'), (q, q') sur la droite $(gh, g'h')$. En menant par ces points les parallèles à la direction (D, D') des génératrices, on obtient à l'intersection de ces droites et de la droite $(ab, a'b')$ les points d'intersection (r, r') et (s, s') de cette droite et du cylindre.

Comme vérification des constructions, les droites rr' et ss' doivent être perpendiculaires à la ligne de terre.

222. Problème. — *Trouver les génératrices d'un cône parallèles à un plan donné.*

Soit un cône de sommet S, de directrice circulaire C dans le plan P; proposons-nous de déterminer les génératrices du cône parallèles à un plan donné Q (*fig.* 116).

Le lieu géométrique des droites menées par le point S parallèlement au plan Q est le plan Q′ parallèle à Q et mené par S. Les génératrices cherchées sont donc l'intersection du cône et du plan Q′. On les obtient (217) en cherchant l'intersection AB du plan Q′ avec le plan de base P du cône et en joignant au sommet les points M et N où la droite AB rencontre la base.

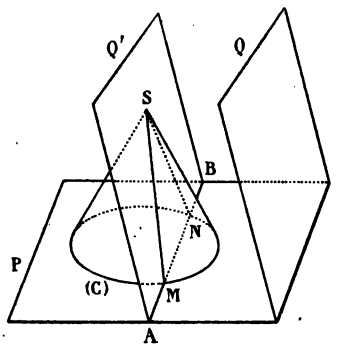


Fig. 116

Le problème admet donc 2, 1 ou 0 solutions, suivant la position de la droite AB par rapport à la base.

§ V.

Problèmes sur les plans tangents.

223. **Problème I.** — *Construire le plan tangent en un point d'une surface conique ou cylindrique.*

Il suffit d'appliquer les résultats des corollaires des nos 184 et 190.

224. Par exemple, dans l'épure de la figure 101, le plan tangent au cône au point (a, a'_2) est défini par la génératrice $(sa, s'a'_2)$ de ce point et la tangente $(ct, c't')$ à la base du cône au point (c, c') où la génératrice précédente rencontre cette base.

225. De même, dans l'épure de la figure 105, le plan tangent au cylindre au point (a, a'_1) est défini par la génératrice $(ab, a'_1b'_1)$ de ce point et la tangente (bt, b'_1t') à la base du cylindre au point (b, b'_1) où la génératrice précédente rencontre cette base.

226. **Problème II.** — *Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents par un point extérieur.*

Solution géométrique. — 1° *Cas du cône.* — Soit à mener au cône de sommet S et de directrice circulaire (C) les plans tangents par le point A (*fig.* 117).

Les plans cherchés passent par le sommet S (186, 1°), ils contiennent donc la droite SA. Par suite, leur trace sur le plan de base passe par la trace B de cette droite sur ce plan. Comme d'autre part (186, 2°) cette trace est tangente à la base du cône, on la détermine en menant par B les tangentes BE et BD à la directrice (C).

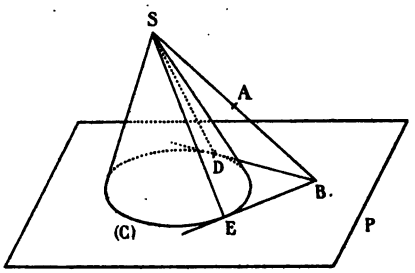


Fig. 117

Les plans cherchés sont les plans SBE et SBD qui sont tangents au cône le long des génératrices SE et SD (185).

Le problème a 2 ou 0 solutions, suivant que le point B est extérieur ou intérieur au cercle (C). Si B est sur le cercle, A est un point de la surface du cône et le problème n'a plus qu'une solution.

227. Remarques. — I. Si le point A vient au sommet du cône, le problème est indéterminé, car tous les plans tangents au cône contiennent le sommet (186, 1°).

228. II. — Si la droite SA est parallèle au plan P, le point B n'existe plus, mais la trace du plan tangent sur P est alors parallèle à SA et la construction s'achève en menant à la directrice les tangentes parallèles à SA.

229. III. — Si le point A se déplace sur la droite SB passant par le sommet du cône, les solutions du problème ne changent pas et on peut considérer la solution donnée comme celle du problème : *Mener les plans tangents à un cône par une droite passant par son sommet.*

230. 2° *Cas du cylindre.* — Soit à mener par le point A les plans tangents au cylindre de génératrice G et de directrice circulaire (C) (*fig.* 118).

Les plans cherchés sont parallèles aux génératrices du cylindre (192, 1°), ils contiennent donc la droite AB menée par A parallèlement à la direction des génératrices. Par suite, leur trace sur le plan

de base passe par la trace B de cette droite ; comme d'autre part (192, 2°) cette trace est tangente à la directrice, on la détermine en menant par B les tangentes BD et BE à la directrice (C).

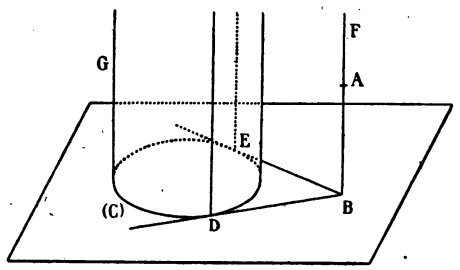


Fig. 118

Le problème admet 2 ou 0 solutions suivant que le point B est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle (C). Si B est sur le cercle, A est sur la surface du cylindre et le problème n'a qu'une solution.

231. Remarque. — Si le point A se déplace sur la droite BF (*fig.* 118) parallèle à la direction des génératrices, les solutions du problème ne changent pas et on peut considérer la solution donnée comme celle du problème suivant : *Mener les plans tangents à un cylindre par une droite parallèle à la direction de ses génératrices.*

232. Premier exemple. — Soit à mener par le point (a, a') les plans tangents au cône de sommet (s, s') dont la base est un cercle de centre (o, o') du plan horizontal (*fig.* 119).

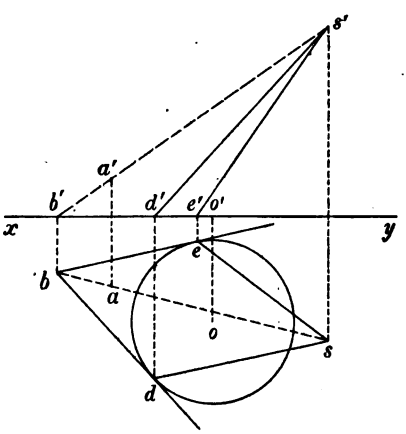


Fig. 119

Il suffit d'effectuer les constructions indiquées au n° 226. On mène la droite $(sa, s'a')$ dont on cherche la trace sur le plan de base, c'est-à-dire ici la trace horizontale (b, b'). On mène par b les tangentes à la base du cône, d'où les génératrices de contact projetées horizontalement en sd, se et verticalement en $s'd'$, $s'e'$, en tenant compte de ce que les points D et E sont dans le plan horizontal de projection.

233. **Deuxième exemple.** — Soit à mener par le point $a(4)$ les plans tangents au cylindre qui a pour base, dans le plan P défini par son échelle de pente, un cercle de rayon donné r dont le centre est projeté en o. Ses génératrices sont parallèles à la direction $m(1)n(2)$ (*fig.* 120).

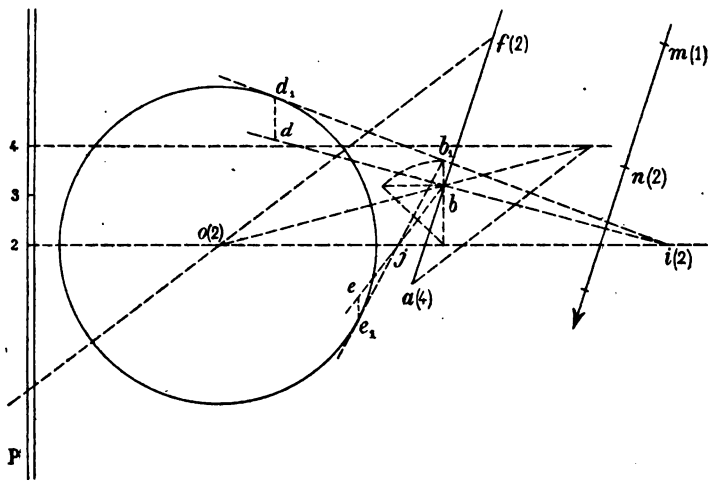


Fig. 120

Appliquons les constructions du n° 230. Menons par le point $a(4)$ la parallèle $a(4)\,f(2)$ à la direction $m(1)\,n(2)$ des génératrices et cherchons sa trace sur le plan P, en prenant pour plan auxiliaire le plan $a(4)f(2)o(2)$. Nous obtenons ainsi le point projeté en b (de cote approximative 3,2). On mène les tangentes par ce point à la base du cône en rabattant le plan de cette base sur le plan horizontal de cote 2. Le cercle se rabat suivant le cercle de centre o, de rayon r (car o situé sur la charnière coïncide avec son rabattement). Le point $b(3,2)$ de l'échelle de pente se rabat en b_1 d'après la règle du triangle rectangle (I, 177). Par le point b_1, on mène les tangentes b_1d_1, b_1e_1 au rabattement du cercle ; ces tangentes ont pour relèvements bi et bj. Les points de contact d_1 et e_1 se relèvent en d et e.

Les plans cherchés sont définis par la droite $a(4)f(2)$ et les points du plan respectivement projetés en d et e

234. **Problème III.** — *Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents parallèles à une droite donnée.*

Solution géométrique. — 1° *Cas du cône.* — Soit à mener au

cône de sommet S et de directrice circulaire (C) les plans tangents parallèles à la droite D (*fig.* 121).

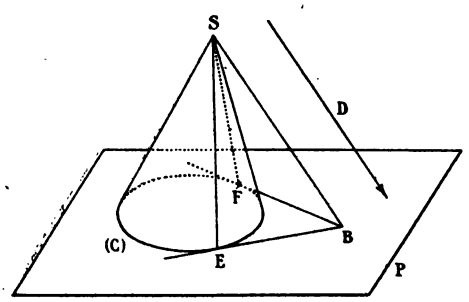


Fig. 121

Les plans cherchés passent par le sommet S du cône (186, 1°), ils contiennent donc la parallèle SB à la droite D menée par S. Par suite, leur trace sur le plan de base passe par la trace B de cette droite sur ce plan. Comme d'autre part (186, 2°) cette trace est tangente à la base du cône, on la détermine en menant par B les tangentes BE et BF à la directrice (C).

Les plans cherchés sont les plans SBE et SBF qui sont tangents au cône le long des génératrices SE et SF (185).

Le problème a 2 ou 0 solutions, suivant que le point B est extérieur ou intérieur au cercle (C). Si B est sur le cercle, la droite D est alors parallèle à une génératrice du cône et le problème n'a plus qu'une solution.

235. Remarque. — Si la droite D est parallèle au plan de base, le point B n'existe plus, mais alors la trace du plan tangent sur le plan de base est parallèle à D et la construction s'achève en menant à la directrice les tangentes parallèles à D.

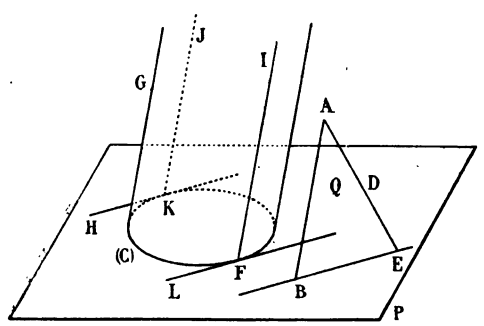


Fig. 122

236. 2° *Cas du cylindre.* — Soit à mener au cylindre de directrice circulaire (C) et de génératrices parallèles à G les plans tangents parallèles à la droite D (*fig.* 122).

Les plans cherchés sont parallèles à la direction G des génératrices

(192, 1°) ; ils sont par suite parallèles au plan Q défini par la droite D et la parallèle AB à G menée par un point quelconque de D, car ils sont parallèles aux deux droites qui définissent ce plan. Par suite, leur trace sur le plan de base P est parallèle à la trace BE du plan Q sur le même plan.

Comme, d'autre part, la trace du plan tangent sur P est tangente à la directrice (C) (192, 2°), on détermine cette trace en menant à la directrice les tangentes FL, HK parallèles à la droite BE.

Ces tangentes et les génératrices FI et KJ de leurs points de contact définissent les plans cherchés LFI et HKJ. En effet, ces plans tangents contiennent des parallèles aux deux droites AB et BE du plan Q, ils sont donc parallèles à ce plan et par suite à la direction D contenue dans le plan Q.

Le problème admet toujours deux solutions, si la base est circulaire.

237. *Cas d'exception.* — La construction précédente suppose distinctes les droites AB et AE. Si ces deux droites sont confondues, c'est-à-dire si la droite donnée D est parallèle aux génératrices du cylindre, le problème est indéterminé et tout plan tangent au cylindre répond à la question (192, 1°).

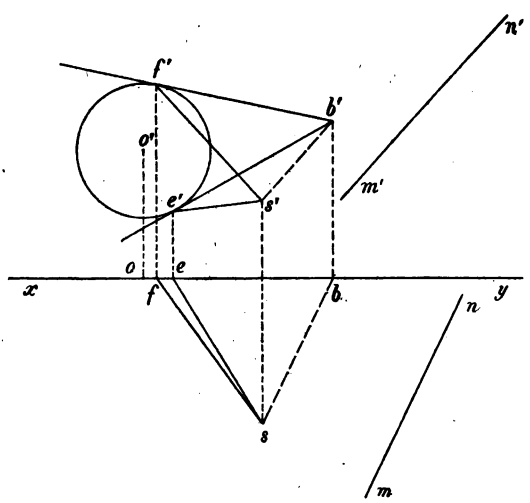


Fig. 123

238. **Exemple I.** — Soit à mener au cône de sommet (s, s') qui a

pour base un cercle (o, o') du plan vertical de projection les plans tangents parallèles à la droite $(mn, m'n')$ (*fig.* 123).

Menons par (s, s') la parallèle à la droite $(mn, m'n')$ (234) et déterminons sa trace sur le plan de base du cône, qui est ici le plan vertical de projection ; on obtient ainsi le point (b, b'). Par b' menons les tangentes $b'e'$, $b'f'$ à la projection verticale o' de la base. Les points de contact e' et f' ont leur projection horizontale en e et f sur la ligne de terre et les génératrices de contact des plans cherchés sont $(se, s'e')$ et $(sf, s'f')$.

239. Exemple II. — Soit à mener à un cylindre de génératrices verticales, ayant pour base la circonférence o du plan horizontal, les plans tangents parallèles à la droite $a(0)b(7)$ (*fig.* 124).

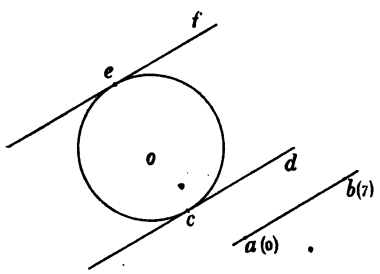


Fig. 124

Le plan mené par la droite $a(0)b(7)$ parallèlement à la direction des génératrices (236) est le plan vertical qui a pour trace horizontale ab. En menant à la base les tangentes cd et ef parallèles à ab, on définit les traces des plans verticaux cherchés. Les génératrices de contact sont les verticales de traces c et e.

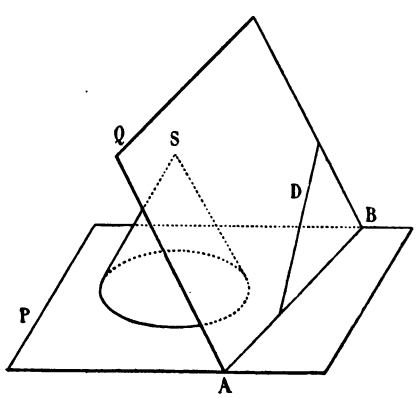


Fig. 125

240. Problème IV. — *Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents par une droite donnée*

Solution géométrique. — 1° *Cas du cône.* — Soit à mener à un cône de sommet S, de directrice circulaire située dans le plan P, les plans tangents par la droite D (*fig.* 125).

I. — Si la droite D ne passe pas par le point S, D et S déterminent un plan Q qui est nécessairement (186, 1°) le plan cherché, à condition

que le problème admette une solution. Mais, en général, ce plan Q n'est pas tangent au cône; on le reconnaît en cherchant sa trace AB sur le plan P de base du cône et en vérifiant que cette droite n'est pas tangente à la directrice (186, 2°).

Le problème est donc en général *impossible*.

241. II. — Si la droite passe par le sommet du cône, on est ramené à un problème déjà traité (229); le problème devient *possible* et admet deux solutions au plus.

242. 2° *Cas du cylindre*. — Soit à mener au cylindre de génératrices parallèles à G et de directrice (C) les plans tangents passant par une droite D (*fig*. 126).

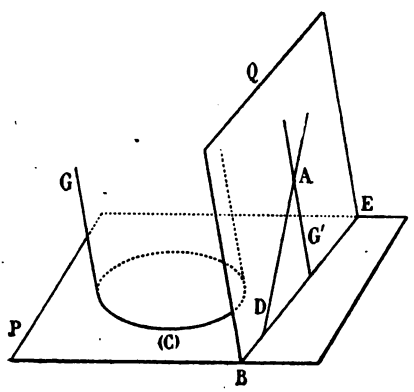


Fig. 126

Tout plan tangent à un cylindre est parallèle à la direction des génératrices (192, 1°); par conséquent, si le problème a une solution, on l'obtient en menant par D le plan Q parallèle à G. On détermine ce plan en menant par un point A quelconque de D la droite G' parallèle à G. Mais en général le plan Q ainsi défini n'est pas tangent au cylindre. On le reconnaît en cherchant sa trace BE sur le plan de base et en vérifiant qu'elle n'est pas tangente à la directrice (192, 2°).

Le problème est donc en général *impossible*.

243. *Cas d'exception*. — Le raisonnement précédent suppose les droites D et G' distinctes. Elles sont confondues lorsque D est parallèle aux génératrices G. On est alors ramené à un problème déjà traité (231), qui est possible et admet au plus deux solutions.

244. **Problème V**. — *Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents parallèles à un plan donné.*

1° *Cas du cône.* — Soit à mener au cône de sommet S et de directrice (C) les plans tangents parallèles au plan Q (*fig.* 127).

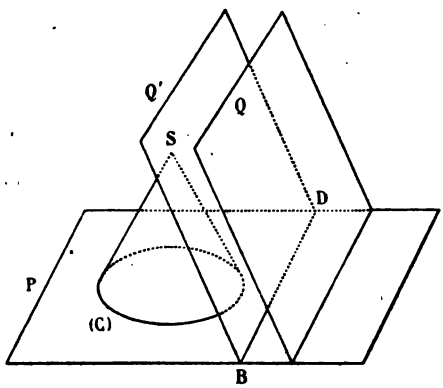


Fig. 127

Tout plan tangent au cône contient le sommet S (186, 1°); par conséquent, si le problème a une solution, on l'obtient en menant par le point S le plan Q' parallèle au plan Q. Mais en général le plan Q' ainsi défini n'est pas tangent au cône. On le reconnaît en cherchant sa trace BD sur le plan de base et en vérifiant qu'elle n'est pas tangente à la directrice (186, 2°).

Le problème est donc en général *impossible*.

245. 2° *Cas du cylindre.* — Soit à mener à un cylindre les plans parallèles à un plan donné Q.

Tout plan tangent au cylindre est parallèle à la direction de ses génératrices (192, 1°); par suite si le plan Q n'est pas parallèle à cette direction, le problème est *impossible*.

Si Q est parallèle aux génératrices, en menant les plans tangents au cylindre parallèles à une droite du plan Q dont la direction est distincte de celle des génératrices, on obtient des plans demandés. On est ainsi ramené à un problème déjà traité (236), qui est *possible* et admet au plus deux solutions.

§ VI.

Ombres.

246. Les définitions et les résultats fondamentaux relatifs à la théorie des ombres ont déjà été donnés (I, 305 et suivants).

247. **Ombre portée par un cône sur le plan de sa base et ombre propre. — I. Cas de l'ombre au flambeau.** — Soit à trouver

l'ombre portée sur un plan P par un cône de sommet S dont la base est une circonférence du plan P, en supposant le point lumineux en O (*fig.* 128). Les rayons issus de O qui rencontrent la surface du cône en deux points distincts C et D portent ombre sur le plan P en γ ; celui de ces deux points C qui est le plus proche de O est éclairé et l'autre D est dans l'ombre propre. Si le rayon tourne autour du point O et devient tangent à la surface du cône, C et D se confondent sur la courbe qui limite l'ombre propre sur la surface du cône et dont l'ombre sur le plan P limite l'ombre portée. Or les tangentes menées par O à la surface du cône sont dans les plans tangents au cône menés par O. D'où le résultat : *le contour de l'ombre propre sur un cône, dans le cas de l'ombre au flambeau, est formé par les génératrices de contact des plans tangents à ce cône menés par le point lumineux ; les traces de ces plans sur le plan du tableau limitent l'ombre portée.*

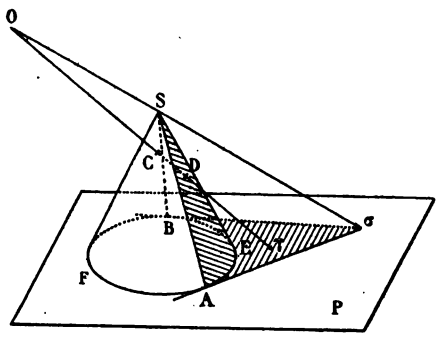


Fig. 128

Trois cas se présentent suivant les différentes positions relatives du plan P et de la demi-droite OS.

248. Premier cas. — Si la demi-droite OS rencontre le plan de base P au point σ (*fig.* 128), ce point est l'ombre portée par le sommet. On obtient les génératrices de contact SA et SB des plans tangents au cône menés par O en menant par le point σ les tangentes σA et σB à la base du cône (226). L'ombre propre est alors le secteur de la surface latérale du cône limité par les génératrices SB, SA et l'arc BEA de la base ; la partie éclairée est limitée par les génératrices SA, SB et l'arc BFA. L'ombre portée sur le plan P est limitée par les droites σA, σB et l'arc AEB. On a couvert de hachures ces deux surfaces dans les parties où elles sont vues.

249. Deuxième cas. — Si la demi-droite OS est parallèle au plan P (*fig.* 129), l'ombre du sommet est rejetée à l'infini. On obtient alors

(228) les génératrices de contact des plans tangents au cône parallèles à OS, en menant à la base les tangentes AG et BH parallèles à OS ; l'ombre propre est le secteur conique SAEB, l'ombre portée s'étend à l'infini entre les deux parallèles AG et BH et l'arc BEA.

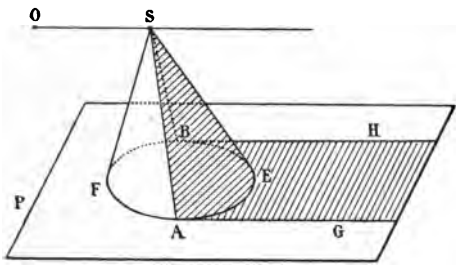


Fig. 129

250. Troisième cas. — Si c'est le prolongement de la droite OS qui rencontre le plan P au point σ (*fig.* 130), le sommet ne porte plus ombre sur le plan P.

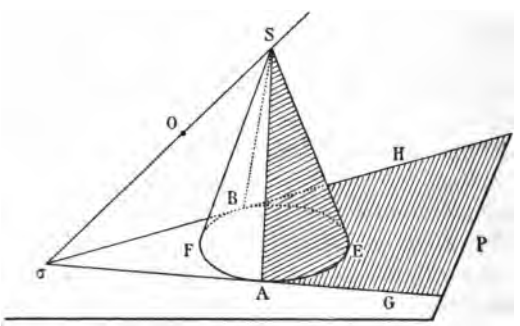


Fig. 130

On achève alors la construction comme dans le premier cas (248) ; l'ombre propre est le secteur conique SAEB, l'ombre portée s'étend à l'infini entre les droites AG, BH et l'arc BEA.

251. II. Cas de l'ombre au soleil. — Dans ce cas, les résultats sont analogues à ceux qui viennent d'être obtenus :

Le contour de l'ombre propre est formé sur la surface par les génératrices de contact des plans tangents menés parallèlement à la direction des rayons lumineux; les traces de ces plans sur le plan du tableau limitent l'ombre portée.

252. Cas du cylindre. — Les résultats précédents s'appliquent mot pour mot au cylindre.

253. Remarque. — Si les ombres sont portées sur deux plans concourants, on tient compte des remarques déjà faites (I, 313 et suivants).

254. **Exemple I.** — *Soit à trouver l'ombre propre et l'ombre portée sur les deux plans de projection par un cône de sommet* (*s*, *s'*), *de base circulaire horizontale* (*c*, *c'*), *éclairé par le point lumineux* (*o*, *o'*) (*fig.* 131).

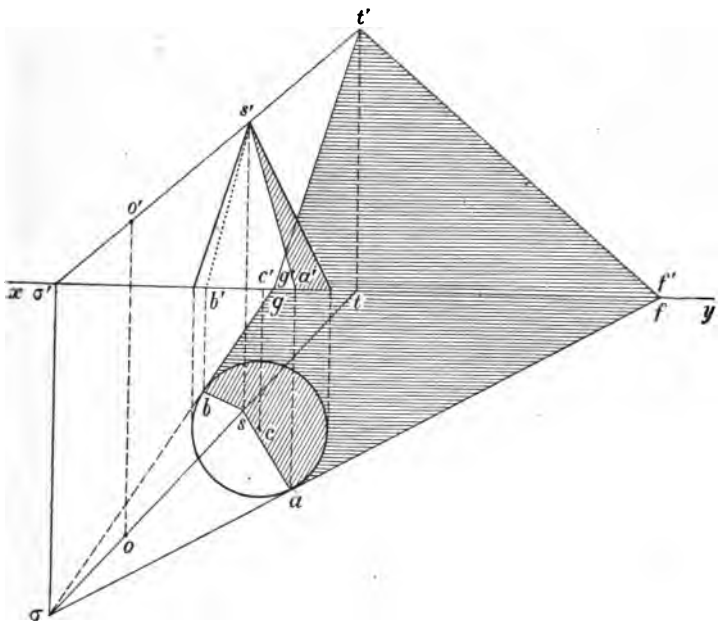


Fig. 131

1° *Ombre propre.* — Menons d'abord (247) les plans tangents au cône par le point (*o*, *o'*). Pour cela (226), cherchons la trace horizontale (σ, σ') de la droite (*os*, *o's'*) et par σ menons les tangentes à la base du cône, ce qui donne en (*sa*, *s'a'*) et (*sb*, *s'b'*) les génératrices du cône limitant l'ombre propre sur sa surface.

2° *Ombre portée.* — Le point (σ, σ') est sur le prolongement de la demi-droite (*os*, *o's'*); donc le sommet du cône ne porte pas ombre sur le plan horizontal, mais il porte ombre sur le plan vertical au point (*t*, *t'*), trace verticale du rayon (*os*, *o's'*).

L'ombre portée sur le plan horizontal est par suite limitée par les traces horizontales *af* et *bg* des plans tangents construits et par l'arc *ab* de la base. L'ombre portée sur le plan vertical est limitée par les droites *t'f'* et *t'g'*, traces verticales des mêmes plans.

3° *Ponctuation.* — On a couvert de hachures parallèles à la ligne de terre les ombres portées et de hachures obliques l'ombre propre, mais seulement dans les parties qui sont vues.

255. Exemple II. — *Trouver l'ombre propre et l'ombre portée sur les plans de projection par un cylindre à base horizontale (c, c') dont les génératrices sont parallèles à (cd, c'd') (fig. 132) ; les rayons lumineux ont la direction de la droite (de, d'e').*

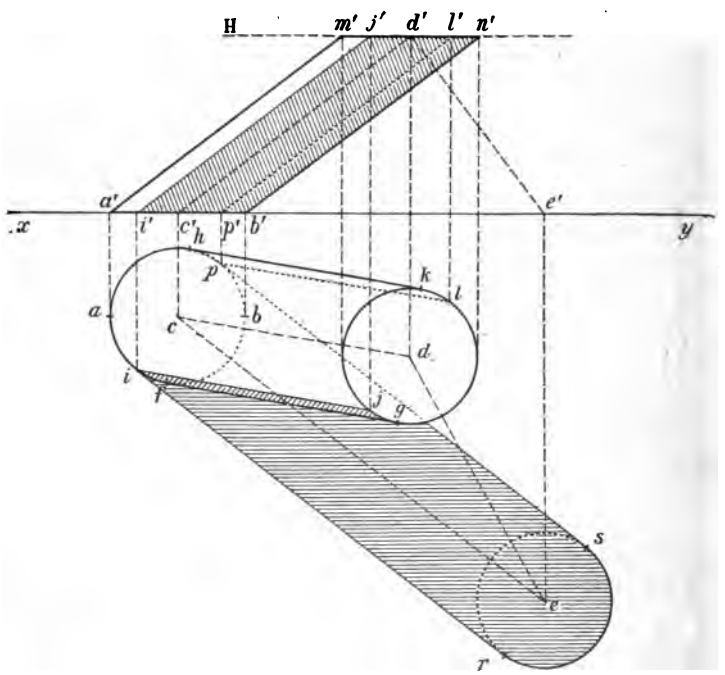


Fig. 132

La base se projette horizontalement en vraie grandeur et verticalement suivant un segment *a'b'* égal à son diamètre et situé sur la ligne de terre. On a construit le contour apparent horizontal du

cylindre comme il a été déjà indiqué (207), en menant à la projection horizontale de sa base les tangentes *fg* et *hk* parallèles à la projection horizontale *cd* des génératrices ; de même, en menant par *a'* et *b'* les parallèles *a'm'*, *b'n'* à la projection verticale des génératrices, on obtient le contour apparent vertical (205). Le cylindre est limité vers le haut à la section par le plan horizontal H ; cette section est une circonférence égale à la circonférence de base et qui s'en déduit par la translation (*cd*, *c'd'*).

256. *Ombre propre.* — Pour obtenir l'ombre propre (251), menons au cylindre les plans tangents parallèles à la direction (*de*, *d'e'*). Pour cela (236), considérons le plan (*cde*, *c'd'e'*) parallèle aux génératrices du cylindre (*cd*, *c'd'*) et aux rayons lumineux (*de*, *d'e'*) ; sa trace sur le plan de base est la droite (*ce*, *c'e'*) ; les tangentes *ir*, *ps* à la base menées parallèlement à *ce* déterminent les génératrices du cylindre (*ij*, *i'j'*), (*pl*, *p'l'*) qui limitent l'ombre propre, qu'on a couverte de hachures dans les régions vues sur chaque projection.

257. *Ombre portée.* — L'ombre portée sur le plan horizontal de projection est limitée par l'arc *ibp* de la base et par les traces horizontales *ir* et *ps* des plans tangents au cylindre menés parallèlement à la direction des rayons lumineux. Pour obtenir l'ombre portée par la base supérieure (*d*, *d'*), on remarque qu'elle est la section par le plan horizontal de projection du cylindre qui a pour base la circonférence (*d*, *d'*) et pour direction de génératrices celle des rayons lumineux (*de*, *d'e'*). Cette section se déduit de la base supérieure par la translation (*de*, *d'e'*) ; c'est donc une circonférence égale à la circonférence *c* et dont le centre est en *e*. On a couvert de hachures parallèles à *xy* la partie de l'ombre portée qui est vue en projection.

§ VII.

Contours apparents.
Représentation des cônes et cylindres.

258. Définitions. — On appelle *contour apparent* d'un cône ou d'un cylindre relativement à un plan P le lieu des points de cette surface où le plan tangent est perpendiculaire à P.

Le contour apparent relatif au plan horizontal ou plus couramment le *contour apparent horizontal* est donc le lieu des points de la surface où le plan tangent est vertical. De même, le *contour apparent vertical* est le lieu des points de la surface où le plan tangent est de bout.

259. **Théorème.** — *Le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre relatif à un plan* P *se compose, quand il existe, de génératrices.*

En effet, si en un point M de la surface, le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan P, il en est de même en tout point de la génératrice du point M, car le plan tangent à un cône ou un cylindre est le même tout le long d'une génératrice (185, 191). La génératrice du point M fait donc partie tout entière du contour apparent, qui se compose par suite d'une ou de plusieurs génératrices.

260. **Représentation des cônes et des cylindres.** — Pour représenter sur une épure un cône ou un cylindre, on figure, d'après les conventions bien connues sur la ponctuation (I, 261 et suivants) :

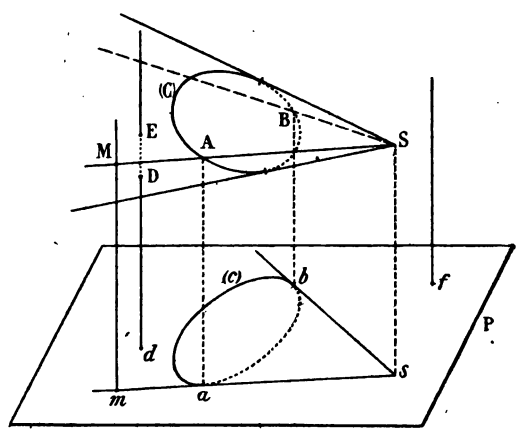


Fig. 133

1° La projection du contour apparent de la surface relatif au plan de projection considéré ;

2° les projections de la base de la surface pour un cône, ou des deux bases lorsqu'il s'agit d'un cylindre.

La représentation des bases s'explique d'elle-même, car elles servent à limiter la surface ou le volume considéré.

Celle des contours apparents se justifie en remarquant que pour

un observateur O s'éloignant à l'infini dans la direction sS perpendiculaire au plan P (*fig.* 133) le cône apparaît comme situé tout entier entre les deux plans tangents sSA et sSB qu'on peut lui mener par la droite Ss.

261. Une droite perpendiculaire au plan P rencontre la surface du cône :

1° en un seul point M si sa trace m sur le plan P est sur la projection du contour apparent ;

2° en deux points D et E si sa trace d est dans l'angle asb des deux génératrices de contour apparent.

Elle ne la rencontre pas si sa trace f est en dehors de l'angle asb.

262. Les génératrices de contour apparent séparent sur le cône la région vue par l'observateur O de celle qui lui est cachée.

263. Remarque. — La recherche du contour apparent d'une surface relatif à un plan P revient à celle du contour de l'*ombre propre* de la surface, en la supposant éclairée par des rayons lumineux perpendiculaires au plan P, et la représentation de la surface sur l'un des plans de projection est celle de l'*ombre portée* sur ce plan par la surface éclairée par des rayons perpendiculaires à ce plan (251).

264. **Détermination des contours apparents.** — Première méthode. — Soit P le plan par rapport auquel on cherche le contour apparent. Il faut déterminer les plans tangents à la surface perpendiculaires à P (258).

Or tout plan perpendiculaire à P est parallèle à une droite perpendiculaire à P, et réciproquement. Par suite, le problème revient à celui-ci : *Mener les plans tangents à la surface parallèles à la direction de la perpendiculaire au plan* P. Ce problème a déjà été traité pour le cône et le cylindre (234, 236).

265. *Conséquence.* — La construction du contour apparent horizontal revient donc à celle des plans tangents à la surface parallèles à la direction des verticales ; celle du contour apparent vertical revient à la détermination des plans tangents parallèles à la direction des droites de bout.

266. Deuxième méthode. — Si on connaît la projection (c) sur le plan P d'une courbe (C) tracée sur le cône ou le cylindre (*fig.* 133),

les projections sur P des génératrices de contour apparent relativement au plan P sont tangentes à la courbe (c) (118). En effet, le théorème du n° 118, comme on l'a indiqué (118, Rem.), s'applique aux surfaces autres que la sphère.

D'autre part, *dans le cas du cône*, les projections des génératrices passent par la projection *s* du sommet S du cône sur le plan P ; *on obtient*, par suite, *les projections sur le plan* P *des génératrices de contour apparent relativement à ce plan, en menant par s les tangentes à la courbe* (c).

De même, *dans le cas du cylindre, on obtient les projections sur le plan* P *des génératrices de contour apparent relativement à ce plan en menant à la courbe* (c) *les tangentes parallèles à la projection sur* P *de la direction des génératrices du cylindre.*

267. Exemple I. — *Soit à déterminer les contours apparents horizontal et vertical d'un cône de sommet* (*s*, *s'*) *et dont la base est un cercle* (*o*, *o'*) *du plan horizontal* (*fig.* 134).

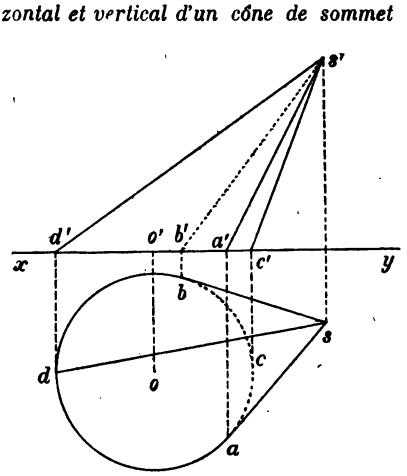


Fig. 134

PREMIER PROCÉDÉ. — 1° *Contour apparent horizontal.* — Il faut mener au cône les plans tangents parallèles à la direction des verticales (265). Pour cela (234), on considère la verticale du sommet (*s*, *s'*) ; sa trace sur le plan de base, qui est le plan horizontal de projection, est le point *s* par lequel on mène les tangentes *sa*, *sb* à la directrice du cône. On a dans l'espace les génératrices de contour apparent (*sa*, *s'a'*), (*sb*, *s'b'*) en rappelant *a* et *b* en *a'* et *b'* sur la ligne de terre. Le contour apparent en projection horizontale est formé par les droites *sa* et *sb*.

268. 2° *Contour apparent vertical.*— Il faut mener au cône les plans tangents parallèles à la direction des droites de bout (265). Pour cela (234), on considère la droite de bout du sommet (*s*, *s'*) ; elle est pa-

rallèle au plan de base du cône, par suite (235), on obtient les traces horizontales des plans cherchés en menant à la base les tangentes parallèles à la droite ss' ; on obtient ainsi les tangentes cc' et dd'. Les génératrices de contour apparent vertical sont dans l'espace $(sc, s'c')(sd, s'd')$ et le contour apparent en projection verticale est formé par les droites $s'c'$ et $s'd'$.

Ponctuation. — Les contours apparents sont vus. En projection horizontale, l'arc adb de la base est vu ; l'arc bcd, situé au-dessous des génératrices vues telles que $(sd, s'd')$ qui s'appuient sur l'arc abd, est caché.

269. Deuxième procédé. — Comme on connaît les projections horizontale et verticale de la base du cône suivant le cercle o de rayon oa et le segment $c'd'$, la deuxième méthode indiquée (266) s'applique. On obtient immédiatement le contour apparent horizontal du cône en menant par la projection horizontale du sommet les tangentes sa et sb à la projection horizontale de la base.

De même, les tangentes $s'c'$, $s'd'$ menées par la projection verticale s' du sommet à la projection verticale de la base donnent les génératrices de contour apparent vertical. Ces tangentes s'obtiennent en considérant par exemple le segment $c'd'$ comme la limite d'une ellipse de foyers c' et d' dont le petit axe tend vers zéro (*fig.* 135) ; les tangentes $s't'$ et $s'u'$ ont pour limites $s'c'$ et $s'd'$.

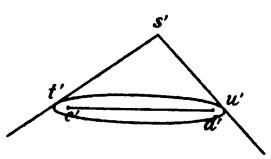


Fig. 135

270. Remarque. — Le contour apparent horizontal a été obtenu en menant par la projection horizontale s du sommet la tangente à la projection horizontale de la base. On obtient deux génératrices de contour apparent si s est extérieur à la base ; c'est le cas de la figure 134.

271. Si s est sur la base, on n'a plus qu'une génératrice de contour apparent $(sa, s'a')$ (*fig.* 136) qui est verticale. On peut considérer la tangente at à la base au point a comme la limite des projections des génératrices de contour apparent sa et sb de la figure 134 lorsque le point s se rapproche de plus en plus d'un point du cercle O.

272. Enfin si s est à l'intérieur de la base, il n'y a plus de contour apparent horizontal (*fig.* 137).

273. **Exemple II.** — Soit à trouver les contours apparents horizontal et vertical d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles

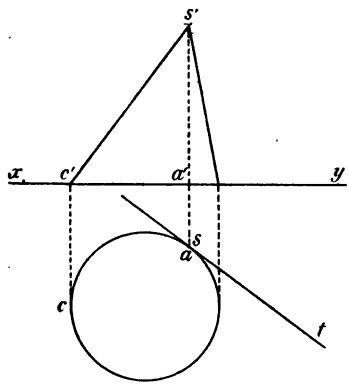


Fig. 136

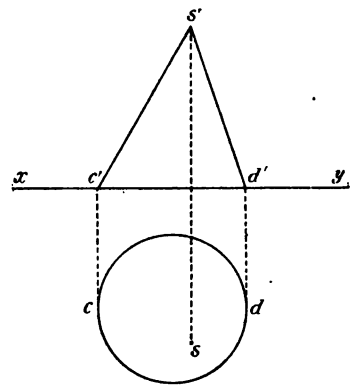


Fig. 137

à la droite (D, D') (*fig.* 138) et dont la base est le cercle (*o*, *o'*) situé dans le plan de front F.

La base se projette verticalement en vraie grandeur et horizontalement suivant un segment *ab* égal à son diamètre (102).

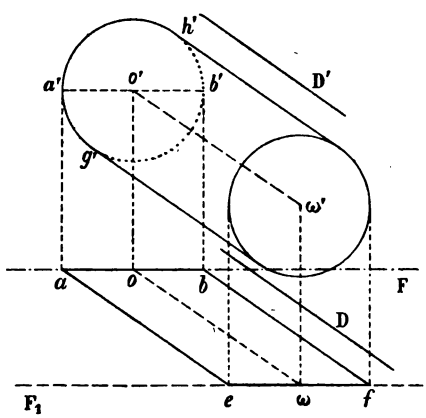


Fig. 138

Appliquons la deuxième méthode indiquée (266), car nous connaissons les projections d'une courbe tracée sur le cylindre.

1° Le contour apparent horizontal s'obtient en menant à la projection horizontale de la base les tangentes parallèles à la projection horizontale D de la direction des génératrices. Comme on l'a déjà remarqué (269), ces tangentes sont les parallèles *ae*, *bf* à la droite D menées par *a* et *b*.

2° Le contour apparent vertical s'obtient de même (266) en menant à la projection verticale de la base les tangentes en *g'* et *h'* parallèles à D', projection verticale de la direction des génératrices.

3° *Ponctuation.* — On a limité la surface cylindrique à la base donnée dans le plan de front F et à une deuxième base située dans le plan de front F_1. Cette nouvelle base est égale à la 1re et s'en déduit par la translation ($o\omega$, $o'\omega'$), parallèle aux génératrices (D, D').

La ponctuation se justifie aisément.

274. Exemple III. — *Géométrie cotée.* — Trouver le contour apparent horizontal d'un cylindre à directrice circulaire horizontale, dont les génératrices sont verticales.

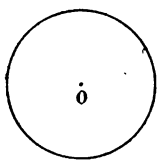


Fig. 139

Soit o (*fig.* 139) la directrice du cylindre dans le plan horizontal. Comme ses génératrices sont verticales et que le plan tangent en un point contient la génératrice de ce point (190), tous les plans tangents au cylindre sont verticaux ; par suite, tout point du cylindre est un point du contour apparent horizontal. Ce contour apparent dans l'espace comprend la surface entière du cylindre; en projection, il se réduit à la circonférence O (212).

275. **Exemple IV.** — Soit à déterminer les contours apparents horizontal et vertical d'un cône de sommet (s, s') et dont la base est un cercle dont on connaît le plan défini par ses traces PαQ, la projection horizontale o du centre et la longueur du rayon (*fig.* 140).

1° *Contour apparent horizontal.* — Il faut mener au cône des plans tangents verticaux (265). Pour cela (234) on considère la verticale du sommet (s, s') ; sa trace sur le plan de base PαQ s'obtient en cherchant à l'aide de l'horizontale (ta, $t'a'$) le point (t, t') de ce plan dont la projection horizontale t est confondue avec s.

Pour mener les tangentes à la base du cône par le point (t, t'), on rabat le plan PαQ sur le plan horizontal de projection par la méthode connue (I, 183). L'horizontale du centre de la base (hb, $h'b'$) permet de déterminer la projection verticale o' du centre projeté horizontalement en o. Le rabattement b_1 du point (b, b') est à l'intersection de la perpendiculaire $b\beta$ à la charnière αP et de l'arc de cercle de centre α et de rayon $\alpha b'$. Le rabattement de l'horizontale (bh, $b'h'$) s'obtient en menant par b_1 la parallèle b_1h_1 à la charnière αP ; le rabattement du centre (o, o') est au point o_1 intersection de b_1h_1 et de la perpendiculaire menée par o à la charnière αP. Le cercle de base se rabat en vraie grandeur. Pour obtenir le rabattement t_1 du point (t, t') on considère la droite (ot, $o't'$) qui coupe la charnière en i ; son rabattement est la droite o_1i dont l'intersection t_1 avec la perpendiculaire menée par t à la charnière est le point cherché.

On obtient le rabattement des tangentes cherchées en menant par le point t_1 les tangentes t_1c_1 et t_1d_1 au cercle o_1. Ces tangentes coupent la charnière aux points j et l ; leurs projections horizontales sont donc les droites tj et tl. On

a ainsi les projections horizontales des génératrices de contour apparent horizontal. Elles sont tangentes à l'ellipse (188), projection horizontale de la cir-

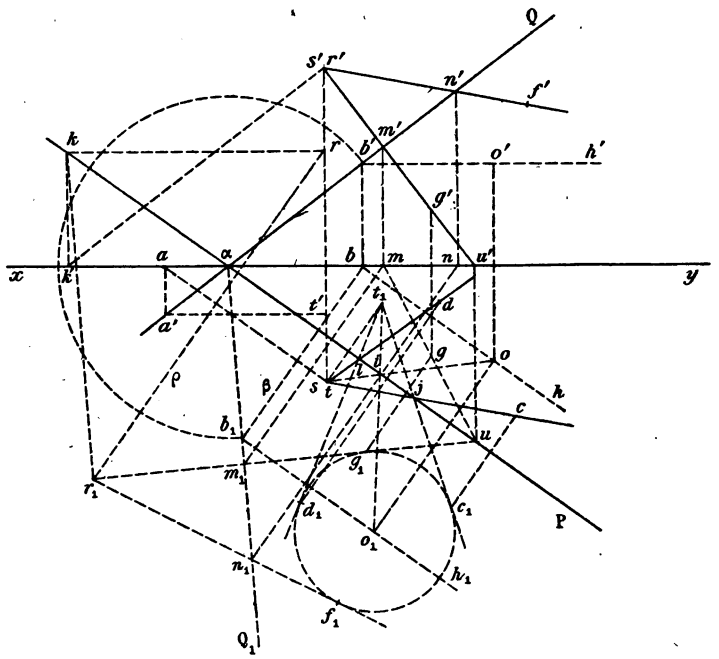


Fig. 140

conférence de base aux points c et d, projections horizontales des points de contact rabattus en c_1 et d_1.

2° *Contour apparent vertical.* — Pour mener au cône les plans tangents de bout (265), on cherche la trace sur le plan PαQ de la droite de bout du sommet (s, s') ; elle s'obtient à l'aide de la frontale $(rk, r'k')$ en cherchant le point (r, r') dont la projection verticale est confondue avec s'.

Pour mener les tangentes à la base par le point (r, r'), on cherche sur le plan horizontal son rabattement r_1, qui est à l'intersection de la perpendiculaire menée par r à la charnière et du rabattement de la frontale $(rk, r'k')$ obtenu en menant par k la parallèle à αb_1. On mène par le point r_1 les tangentes r_1g_1 et r_1f_1 au cercle o_1 dont on relève les points m_1 et n_1 situés sur αb_1 en (m, m') et (n, n'), par la construction connue (I, 188).

Le contour apparent vertical est projeté verticalement en $s'm'$ et $s'n'$. Ces deux droites sont tangentes à l'ellipse projection verticale du cercle de base aux points g' et f, projections verticales des points de contact rabattus en g_1 et f_1. On a construit sur l'épure le point g' en relevant la droite r_1m_1u en $(mu, m'u')$ et en relevant ensuite le point g_1 en (g, g').

On n'a pas tracé les ellipses projections de la base.

EXERCICES

1. Construire les génératrices d'un cône donné ayant une pente donnée. (On supposera la directrice du cône horizontale). Discuter. Trouver les génératrices de pente maximum ou minimum.

2. Construire les génératrices d'un cône perpendiculaires à une droite donnée.

3. Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents perpendiculaires à un plan donné.

4. Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents perpendiculaires à une droite donnée.

5. Déterminer les points d'un cône ou d'un cylindre où la normale est perpendiculaire à une droite donnée. (La normale en un point d'un cône ou d'un cylindre est la perpendiculaire menée par ce point au plan tangent à la surface en ce point).

6. Mener à un cône ou à un cylindre les normales parallèles à un plan donné.

(*Saint-Cyr.*)

7. Mener par un point donné une droite s'appuyant sur une droite et une circonférence données.

8. Mener par un point une parallèle à une direction donnée s'appuyant sur une droite et une circonférence données.

9. Mener par un point les tangentes communes à deux cônes.

(*Saint-Cyr.*)

10. On donne un cylindre ou un cône à base circulaire horizontale, une droite et un point. Construire les droites passant par le point, rencontrant la droite et tangentes au cylindre ou au cône.

(*Saint-Cyr.*)

11. Construire la projection verticale d'une droite passant par un point donné et tangente à un cône donné, connaissant la projection horizontale de la droite cherchée.

12. Construire deux plans perpendiculaires dont l'intersection a une direction donnée et rencontre la ligne de terre, et qui passent l'un par un point donné A, l'autre par un point donné B.

(*Navale.*)

13. On donne une sphère par ses contours apparents, on considère une section de la sphère par un plan quelconque et le cône qui a pour base cette section et pour sommet le point le plus haut de la sphère. Trouver l'intersection du cône et d'une droite quelconque.

14. Mener par un point donné une tangente commune à deux cônes définis par leurs sommets et leurs bases qui sont des cercles du plan horizontal.

15. Mener par une droite rencontrant la ligne de terre un plan faisant un angle donné avec la ligne de terre.

(*Saint-Cyr.*)

16. On donne un plan par ses traces PαQ.

1° Mener par le point α dans le plan une droite faisant un angle donné avec la ligne de terre ;

2° Déterminer la droite du plan qui fait avec xy l'angle minimum.

Contours apparents.

17. Trouver les contours apparents d'un cône de sommet donné et dont la base est une circonférence située dans un plan de bout donné et définie par son rabattement sur le plan horizontal.

18. On donne un plan par ses traces. Un cercle du plan horizontal o est le rabattement d'un cercle du plan donné sur le plan horizontal. Ce cercle est la base d'un cône droit dont la hauteur est double du rayon de base. Construire les contours apparents de ce cône.

19. On donne trois points (a, a'), (b, b') et (c, c'). Au centre O du cercle circonscrit au triangle de ces trois points, on mène une perpendiculaire à leur plan sur laquelle on prend de part et d'autre deux points S et S_1 tels que $OS = OS_1 = 15^{cm}$. Représenter le double cône dont les sommets sont S et S_1 et qui a pour base le cercle des trois points.

20. (*Géométrie cotée.*) Un tétraèdre régulier SABC est défini sur une épure par les projections cotées $a(o)$, $b(o)$, $c(o)$ de trois de ses sommets.

Construire les contours apparents des cônes ayant pour sommet le point $c(o)$ et pour base respective :

1° le cercle circonscrit au triangle ABS ;

2° le cercle inscrit au même triangle.

21. Un cercle C donné dans le plan horizontal est la base d'un cône C_1 de sommet (s, s') ; ce cône est coupé par un plan PαQ défini par ses traces suivant une courbe qui est la base d'un cône C_2 de sommet (t, t').

1° Connaissant l'une des projections d'un point de la surface du cône C_2, trouver l'autre ;

2° Mener les plans tangents au cône C_2 par un point donné (a, a') ou parallèlement à une direction donnée (δ, δ') ;

3° Trouver les contours apparents du cône C_2 ;

4° Trouver les points communs au cône C_2 et à une droite quelconque.

Ombres.

22. On coupe par un plan horizontal un cône de base circulaire horizontale. Trouver l'ombre du tronc de cône ainsi obtenu :
1° dans le cas de l'ombre au flambeau ;
2° dans le cas de l'ombre au soleil.

23. On définit un cercle de l'espace par trois de ses points (a, a'), (b, b'), (c, c'). Trouver les directions de plans sur lesquels l'ombre de ce cercle est un cercle :
1° dans le cas de l'ombre au flambeau ;
2° dans le cas de l'ombre au soleil.

24. Trouver l'ombre portée par un cône à base circulaire horizontale :
1° sur une droite donnée ;
2° sur la ligne de terre ;
3° sur l'ensemble des deux plans de projection supposés opaques.

25. Un cylindre oblique a pour base une circonférence du plan horizontal (centre o, rayon $= 40^{mm}$) ; les génératrices sont inclinées à 45° sur le plan horizontal ; le cylindre est limité par un plan horizontal de cote 100^{mm}. On suppose le cylindre opaque et éclairé par un point lumineux S de cote 150^{mm} et dont la projection horizontale s est à 80^{mm} du point o sur la parallèle menée par o à la projection des génératrices du côté de la projection de la base supérieure du cylindre. Déterminer l'ombre propre sur le cylindre et l'ombre portée sur le plan horizontal.

26. Un cylindre de révolution de rayon donné repose sur le plan horizontal et a ses génératrices parallèles à la ligne de terre. On le suppose éclairé par des rayons lumineux parallèles à une droite de profil donnée. Construire l'ombre propre du cylindre et l'ombre portée sur les plans de projection.

Cylindre de révolution.

27. On donne deux droites de front parallèles et on considère le cylindre engendré par l'une en tournant autour de l'autre. Trouver la projection verticale d'un point de ce cylindre connaissant sa projection horizontale.

(*Saint-Cyr.*)

28. On donne une horizontale D de cote 2 et une droite graduée Δ. Mener par un point donné une droite rencontrant Δ et dont la plus courte distance à D soit une longueur donnée.

(*Saint Cyr.*)

29. Construire une droite passant par un point donné, parallèle à un plan donné et située à une distance donnée d'une droite donnée.

30. Mener dans un plan donné des droites de pente donnée à une distance donnée de la ligne de terre.

CHAPITRE IX

SECTIONS PLANES DES CONES ET CYLINDRES

§ I.

Sections planes du cône.

276. I. La section d'un cône par un *plan passant par son sommet* se compose de génératrices, qu'on détermine (217) en cherchant la trace AB du plan sécant P sur le plan de base Q (*fig.* 110) et en joignant au sommet S les points M et N où la droite AB rencontre la base du cône.

277. II. Si la base est circulaire, la section par un *plan* P *parallèle à la base* est (Grévy, *Géométrie dans l'espace*, 488 et 439) une circonférence dont le *centre* est le point O′ commun au plan P (*fig.* 141) et à la droite SO qui joint le sommet S au centre O de la base. Pour définir le *rayon* de la section, on cherche le point d'intersection A′ du plan P et d'une génératrice quelconque SA du cône ; le rayon est la longueur O′A′. On peut déterminer facilement ce point A′, en remarquant que les rayons OA et O′A′ sont parallèles.

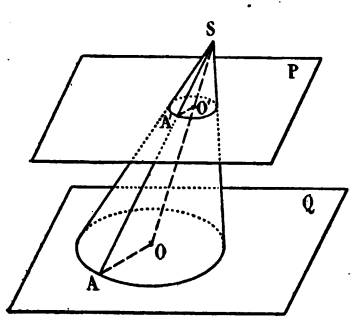


Fig. 141

278. III. La section par un plan *quelconque* est une conique : ellipse, hyperbole ou parabole.

Pour définir la section sur une épure, on en construit un certain nombre de points et de tangentes par les procédés suivants :

1° On obtient un *point quelconque de la section* en cherchant l'intersection d'une génératrice quelconque du cône avec le plan sécant.

2° La *tangente* en un point de la section est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface en ce point, car le théorème du n° 153, démontré pour la section plane d'une sphère, s'applique mot pour mot à la section plane du cône.

3° On obtient les *points* de la section *situés sur les contours apparents* en cherchant les points d'intersection des génératrices de contour apparent avec le plan sécant.

La projection de la section est tangente à la projection de même nom du contour apparent de même nom aux points où elle le rencontre (118).

La recherche de ces points est capitale au point de vue de la ponctuation, car ils séparent sur les projections les arcs vus des arcs cachés (263).

279. On peut aussi construire un *point quelconque de la section* par la méthode déjà signalée à propos de la section plane de la sphère (152).

Par exemple, dans le cas où *la base circulaire du cône est dans un plan horizontal, on emploie un plan auxiliaire horizontal* qui coupe le cône suivant un cercle C facile à déterminer (277) et le plan sécant suivant une horizontale ; les points d'intersection de cette droite et du cercle C sont manifestement des points de la section.

Dans le cas où la *base circulaire du cône est dans un plan de front*, on utilise d'une manière analogue un *plan auxiliaire* de front.

Remarque. — Cette méthode utilise comme courbe simple tracée sur le cône la section circulaire parallèle à la base, alors que la première construction indiquée (278, 1°) utilise la génératrice rectiligne du point. Celle-ci a l'avantage de subsister lorsque la base du cône n'est plus circulaire (ou ne se projette plus suivant un cercle). Aussi, dans les épures qui suivent, l'avons-nous préférée à l'autre.

280. Cas particulier. — *Le plan sécant est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Exemple. — Soit à trouver la section par le plan de bout PαQ du cône de sommet (s, s') et de directrice circulaire horizontale (c, c') (*fig.* 142).

La section située dans le plan de bout se projette verticalement sur la droite αQ (I, 130, 6°) et comme les points du cône se projettent verti-

calement entre les deux génératrices de contour apparent $s'e'$ et $s'f'$ (198), la projection verticale de la section est le segment $m'n'$.

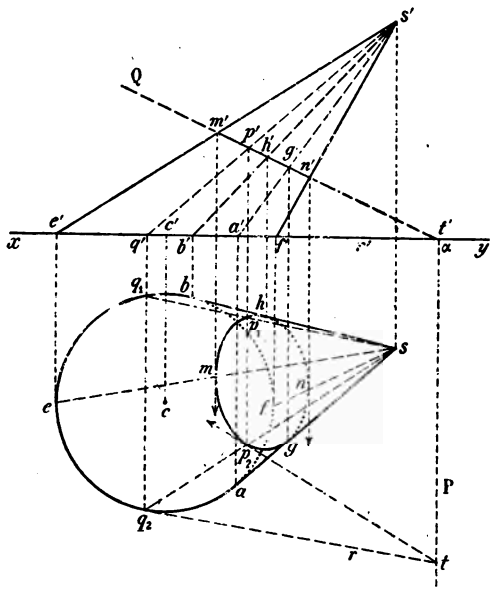


Fig. 142

281. 1° *Recherche d'un point quelconque de la section et tangente en ce point.* — Considérons le point de la section projeté verticalement en p' sur $m'n'$ et cherchons sa projection horizontale ; pour cela (197), menons la projection verticale $s'p'$ de la génératrice de ce point qui rencontre la base aux points (q_1, q'), et (q_2, q'). Les génératrices du point cherché ont pour projections horizontales sq_1 et sq_2 qui coupent la ligne de rappel du point p' aux points cherchés p_1 et p_2.

Pour obtenir la tangente à la section au point (p_2, p') (278, 2°), construisons le plan tangent au cône en ce point, il est défini (224) par la génératrice $(sp_2, s'p')$ et la tangente $(q_2t, q't')$ à la base au point (q_2, q').

La tangente cherchée est l'intersection de ce plan et du plan sécant. On en connaît *a priori* un point (p_2, p'); on en obtient un deuxième en (t, t') à l'intersection des traces horizontales des deux plans. La tangente cherchée est donc la droite $(p_2t, p't')$.

282. 2° *Points sur le contour apparent vertical.* — Les génératrices de contour apparent vertical $(se, s'e')$, $(sf, s'f')$ coupent le plan sécant aux points (m, m') et (n, n') qui sont les points cherchés (278, 3°).

Les plans tangents le long de ces génératrices sont de bout (258), par suite, leurs intersections avec le plan sécant sont les droites de

bout des points (m, m') et (n, n'). Les tangentes à la projection horizontale aux points m et n sont donc les droites mm' et nn'. On dit que ces points sont *les points de la section le plus à gauche et le plus à droite* pour un observateur placé à l'infini en avant du plan vertical et regardant dans la direction du plan vertical.

283. 3° *Points sur le contour apparent horizontal.* — Les génératrices de contour apparent horizontal (sa, $s'a'$), (sb, $s'b'$) coupent le plan sécant aux points (g, g') et (h, h'). Les tangentes à la projection horizontale de la section aux points g et h sont les génératrices de contour apparent sg et sh (118).

284. Sur la projection verticale, on voit que toutes les génératrices coupent le plan sécant à distance finie ; par suite la section est une ellipse, dont la projection horizontale est maintenant facile à tracer car on en connaît 6 points et 5 tangentes.

285. *Ponctuation.* — On a ponctué le cône solide et opaque, en supposant le plan sécant transparent. La section a été tracée sur la surface du cône, l'arc hp_1mp_2g est vu, l'arc gnh est caché.

286. **Cas général. — Première méthode.** — On ramène le cas où le plan sécant est quelconque à celui où il est perpendiculaire à l'un des plans de projection, *en changeant de plan vertical de manière que le plan sécant soit de bout dans le nouveau système.*

C'est la méthode déjà indiquée (I, 287) pour la détermination des sections planes des prismes et pyramides.

287. **Exemple.** — *Soit à trouver la section par le plan* PαQ *du cône de sommet* (s, s') *et de directrice circulaire horizontale* (o, o') (*fig.* 143).

Les contours apparents du cône se construisent en sd, se, $s'b'$, $s'c$ comme il a été indiqué (267, 268).

Pour appliquer la méthode (286), prenons une nouvelle ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à la trace horizontale αP du plan sécant, de manière que dans le nouveau système de projection le plan sécant soit de bout (I, 244).

On obtient un point de la nouvelle trace verticale du plan sécant (I, 245) en menant par le point a projection horizontale d'un point (a, a') de la trace verticale αQ la perpendiculaire à x_1y_1 et en portant

sur elle la longueur $\alpha_1 a'_1$ égale à aa', cote du point a. En joignant a'_1 au point β commun à αP et $x_1 y_1$, on a la nouvelle trace verticale $\beta a'_1$ du plan sécant.

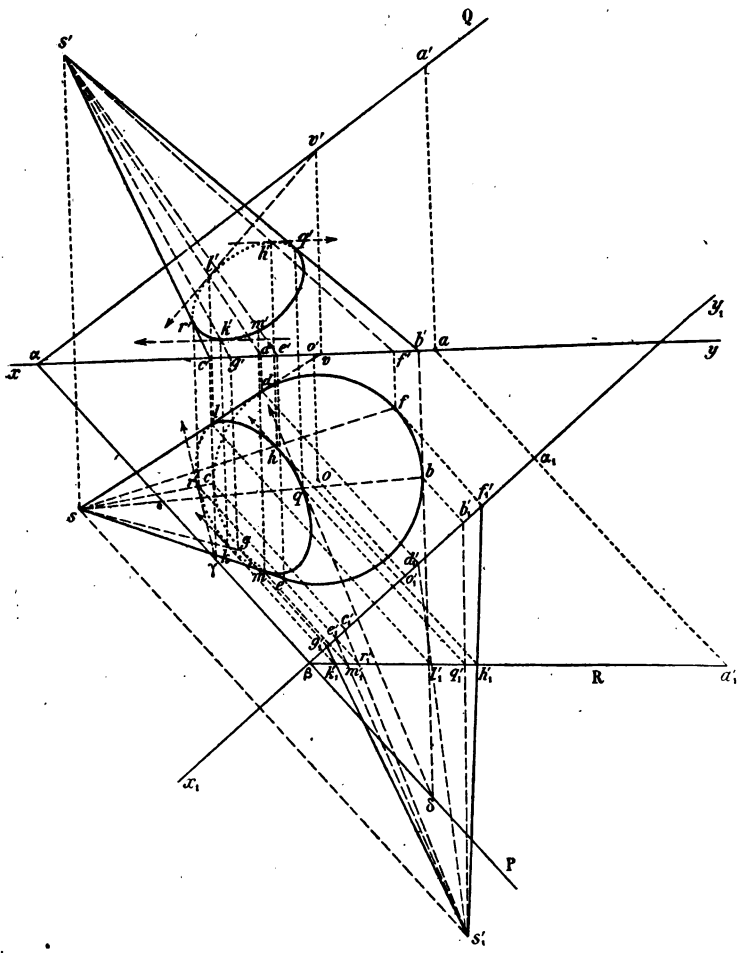


Fig. 143

Le sommet du cône a pour nouvelle projection verticale le point s'_1 obtenu par la construction connue (I, 236).

La base du cône se projette dans le nouveau système suivant un

segment $g'_1 f'_1$ égal à son diamètre et situé sur $x_1 y_1$. Le nouveau contour apparent vertical est $s'_1 g'_1$, $s'_1 f'_1$ (268).

288. D'après ce qui a déjà été vu (280), la section cherchée est projetée verticalement dans le nouveau système suivant le segment $h'_1 k'_1$.

On construit d'abord la projection horizontale de la section en rappelant sur les projections horizontales des génératrices correspondantes les points projetés verticalement sur $h'_1 k'_1$, puis on passe de là à leur projection verticale dans le 1er système.

289. 1° Les points k'_1 et h'_1 sont sur les génératrices $s'_1 g'_1$ et $s'_1 f'_1$ du nouveau contour apparent vertical ; on en déduit k et h situés sur sf et sg ; les tangentes en k et h sont les droites kk'_1 et hh'_1 (282) ; on passe de là à k' et h' à l'aide des génératrices $s'f'$ et $s'g'$.

290. 2° Les points l'_1 et m'_1 sont sur les génératrices $s'_1 d'_1$ et $s'_1 e'_1$, projections verticales des génératrices de contour apparent horizontal sd et se ; on en déduit l et m situés sur sd et se ; les tangentes en ces points sont sd et se (118). Puis on passe à l' et m' à l'aide des projections verticales $s'd'$ et $s'e'$.

291. 3° Les génératrices de contour apparent vertical du premier système $s'c'$, $s'b'$ ont pour projection horizontale sc et sb et pour nouvelle projection verticale $s'_1 c'_1$ et $s'_1 b'_1$, qui coupent $h'_1 k'_1$ en r'_1 et q'_1, d'où les projections horizontales r et q et les anciennes projections verticales r' et q'.

Les tangentes à la projection horizontale de la section en r et q s'obtiennent comme il a été indiqué (281) en $r\gamma$ et $q\delta$.

Les tangentes à la projection verticale de la section en r' et q' sont les génératrices $s'r'$ et $s'q'$ de contour apparent (118).

292. En projection horizontale, on a déterminé les tangentes aux six points m, q, h, l, r, k ; par suite on peut tracer la section avec assez d'exactitude.

On peut obtenir les tangentes aux six points correspondants sur la projection verticale. Les tangentes en r' et q' sont déjà connues. Les tangentes en h' et k' sont parallèles à la ligne de terre, car elles sont horizontales dans l'espace puisque leurs projections horizontales

kk'_1, hh'_1 sont parallèles à αP. Les points (h, h'), (k, k') sont donc *les points le plus haut* et *le plus bas* de la section.

La tangente en l' est la projection verticale de la droite du plan sécant projetée horizontalement en sl ; la trace verticale de cette droite est (v, v') et par suite la tangente en l' est $l'v'$.

293. Pour joindre les points construits, on voit que si l'on se déplace sur la base du cône dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, les génératrices considérées se rencontrent dans l'ordre SE, SB, SF, SD,SC,SG. Pour tracer la section, il faut donc joindre les points déterminés sur la section dans le même ordre MQHLRK.

294. *Ponctuation.* — On a ponctué la surface du cône supposée opaque, avec la section tracée sur elle ; le plan sécant est supposé *transparent.*

295. Deuxième méthode. — On peut aussi, pour réaliser rapide-

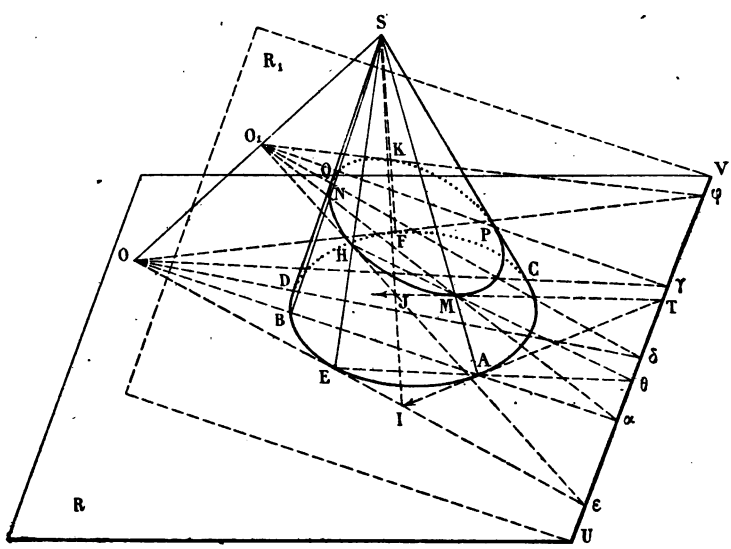


Fig . 144

ment les constructions qui ont été indiquées au n° 279, procéder comme il a été fait déjà pour les pyramides (I, 289).

Soit, par exemple, à chercher l'intersection du cône de sommet S

et de base circulaire dans le plan R (*fig.* 144) avec le plan sécant R_1.

1° Cherchons la droite d'intersection UV du plan sécant R_1 et du plan de base R.

2° Menons par le sommet une droite auxiliaire SOO_1 qui rencontre le plan de base au point O et le plan sécant au point O_1.

3° Pour trouver l'intersection des génératrices du cône avec le plan R_1, nous emploierons des plans auxiliaires déterminés successivement par la droite SOO_1 et chacune de ces génératrices. Tous ces plans auxiliaires contenant la droite fixe SO, leurs traces sur le plan R passent toutes par le point O ; de même leurs traces sur le plan sécant R_1 passent toutes par le point O_1.

296. I. *Construction d'un point quelconque de la section et de la tangente en ce point.* — Cherchons par exemple le point où la génératrice SA perce le plan sécant R_1. Le plan auxiliaire déterminé par la génératrice SA et la droite SO a évidemment pour trace sur le plan R la droite OA joignant les traces des droites SO et SA. Si on désigne par α le point où cette droite OA rencontre l'intersection UV des plans R et R_1, il est bien évident que ce point α appartient à la trace du plan auxiliaire considéré sur le plan R_1 ; or nous connaissons un autre point de cette trace, le point O_1 ; par conséquent, le plan auxiliaire OSA coupe le plan R_1 suivant la droite αO_1, laquelle rencontre à son tour SA en un point M qui est le point cherché.

Pour obtenir la tangente à la section au point M, (278, 2°) on détermine le plan tangent au cône en ce point (184) par la génératrice SA et la tangente AT à la directrice. La droite AT rencontre la droite UV au point T, qui est par suite un point de l'intersection du plan tangent en M et du plan sécant R_1. Comme, *a priori*, le point M est un point de cette intersection, en joignant le point M au point T on obtient en MT la tangente cherchée.

On fait ensuite le même raisonnement pour obtenir de nouveaux points de la section sur d'autres génératrices; les constructions deviennent alors mécaniques.

On peut remarquer que le plan auxiliaire OSA permet d'obtenir un deuxième point de la section ; en effet, sa trace OA sur le plan de base R coupe la base en un deuxième point B, le plan auxiliaire contient donc la génératrice SB dont le point de rencontre N avec la droite αO_1 est un nouveau point de la section.

297. II. *Points sur le contour apparent.* — Pour obtenir le point de la section situé sur une génératrice SC de contour apparent, il suffit d'utiliser le plan auxiliaire SOC passant par cette génératrice. La construction générale du numéro précédent donne en $O\gamma$ la trace de ce plan sur le plan de base, en γO_1 sa trace sur le plan sécant et en P le point cherché.

Une construction analogue détermine le point Q sur la deuxième génératrice SD de contour apparent.

La tangente en un point de la section situé sur le contour apparent se détermine comme au numéro précédent ; sa projection sur le plan auquel le contour apparent est relatif s'obtient sans construction ; c'est la projection de la génératrice de contour apparent sur ce plan (118).

298. III. *Plans auxiliaires limites.* — On nomme ainsi les plans auxiliaires dont la trace OE sur le plan de base est tangente à la base. Un tel plan est tangent au cône (186), la génératrice de contact est SE ; sa trace sur le plan sécant s'obtient, comme précédemment en εO_1 ; elle coupe SE en H, qui est un point de la section.

La tangente en H à la section est toute construite ; c'est la droite $H\varepsilon$, qui est en effet à la fois dans le plan sécant R_1 et dans le plan $SO\varepsilon$ tangent au cône au point H.

Il y a un deuxième plan limite SOF qui donne le point K de la section avec la tangente $K\varphi$.

299. IV. *Jonction des points construits.* — Pour joindre entre eux les différents points construits de manière à tracer la section, on fait tourner d'une manière continue le plan auxiliaire autour de la droite SOO_1 ; la trace de ce plan sur R tourne autour du point O et passe successivement par les points A, C, F, D, B, E de la base quand on tourne sur celle-ci dans un sens déterminé, pendant que la trace de ce plan sur R_1 tourne autour de O_1 et passe successivement par les points de la section M, P, K, Q, N, H dans l'ordre où il faut les joindre.

300. Remarques. — I. Il peut arriver que certaines des droites joignant le point O aux divers points de la base ne rencontrent pas la droite UV dans les limites de l'épure. Pour obtenir le point correspondant de la section, on peut procéder ainsi qu'il suit. Suppo-

sons, par exemple, qu'après avoir obtenu, comme nous l'avons montré (296), le point de la section appartenant à la génératrice SE (*fig.* 144), on ne puisse obtenir par le même procédé le point de la section situé sur la génératrice SA. (Ce cas se présente lorsque le point α est en dehors de la feuille; le tracé de la droite αO_1 est alors impossible).

A la droite auxiliaire SOO_1 on substitue alors la droite SEH et on considère le plan auxiliaire ESA dont la trace EA sur le plan de base rencontre UV au point θ; en menant la droite θH, on obtient l'intersection du nouveau plan auxiliaire et du plan sécant, qui coupe la génératrice SA au point cherché M, qu'on détermine ainsi sans utiliser le point α.

De même, la construction indiquée pour la tangente au point M ne s'applique plus lorsque le point T est en dehors de la feuille.

On procède alors ainsi : pour trouver un point autre que M commun au plan sécant R_1 et au plan tangent SAT, on coupe ces deux plans par le plan auxiliaire SOE dont l'intersection avec le plan sécant est la droite O_1H et dont l'intersection avec le plan SAT est définie par le sommet S du cône et le point I commun aux traces OE et AT des deux plans sur le plan de base. Le point J commun à SI et à O_1H est un point de l'intersection des plans R_1 et SAT. La tangente cherchée est donc la droite MJ, qu'on obtient ainsi sans utiliser le point T.

301. II. Si la droite UV, suivant laquelle le plan sécant R_1 coupe le plan R, traverse la base du cône, il est bien clair que les points de rencontre de cette droite avec la base sont des points de la section.

302. III. La droite auxiliaire SOO_1 est une droite menée arbitrairement par le sommet du cône ; on la choisit de manière à avoir des constructions aussi simples que possible. On peut, dans le cas où la base est un cercle, placer le point O au centre de la base ; dans ce cas, il n'y a pas de plan auxiliaire limite.

La droite SOO_1 peut aussi être une génératrice du cône. Dans ce cas, le point O_1 où elle perce le plan sécant est un point de la section cherchée.

303. Application. — *Déterminer la section faite par le plan* R_1 *défini par son échelle de pente dans le cône de sommet* s(10) *et de base circulaire* o *dans le plan horizontal de projection* (*fig.* 145).

Les constructions indiquées aux numéros précédents pour déterminer la section plane d'un cône dans l'espace sont projectives, car elles reposent uniquement sur des considérations d'alignements

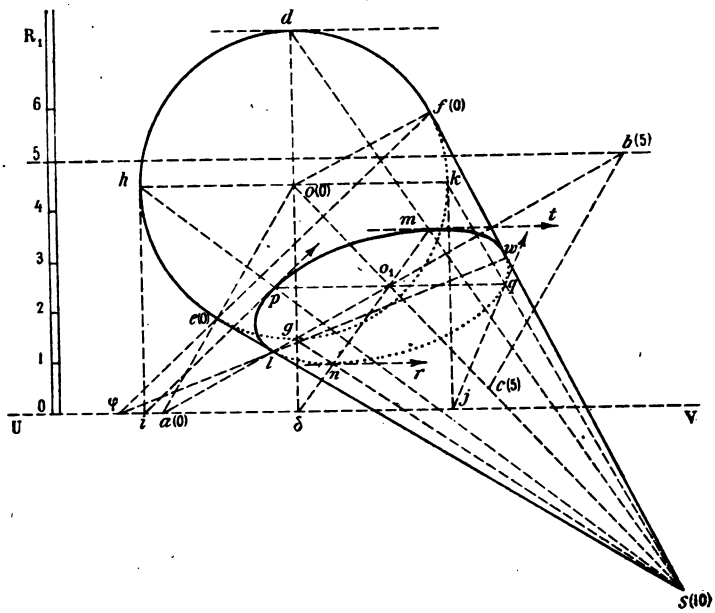


Fig. 145

(3 points en ligne droite) ou de droites concourantes, propriétés qui subsistent en projection. Elles peuvent être répétées mot pour mot sur la projection.

Le contour apparent du cône s'obtient (266) en $s(10)e(0)$, $s(10)f(0)$, en menant par la projection s du sommet les tangentes se et sf à la projection de la base.

304. Nous avons pris dans l'épure comme droite auxiliaire la droite $s(10)o(0)$ qui joint le sommet $s(10)$ au centre $o(0)$ de la base; la trace de cette droite sur le plan de base est donc le point $o(0)$. On détermine facilement sa trace sur le plan sécant R_1 au moyen du plan auxiliaire $e(0)s(10)o(0)$, dont les horizontales de cotes 0 et 5 coupent en $a(0)$ et $b(5)$ les horizontales de même cote du plan R_1. Les droites ab et so se coupent en o_1, projection horizontale du point commun au plan R_1 et à la droite auxiliaire.

La droite d'intersection du plan de base et du plan sécant est la trace horizontale UV de ce dernier plan.

305. *Construction de points quelconques de la section.* — 1° Par exemple, pour avoir les points de la section situés sur les génératrices *sd* et *sg* qui aboutissent aux extrémités du diamètre *dg* de la base perpendiculaire à UV, on prolonge *dg* jusqu'en δ où elle rencontre UV, on joint δ au point o_1 et on marque les points *m* et *n* où δo_1 rencontre *sd* et *sg* ; *m* et *n* sont les projections des points cherchés (296).

Les plans tangents au cône en *m* et *n* ont pour traces horizontales les tangentes à la base en *d* et *g* qui sont parallèles à UV ; leurs intersections avec le plan R_1 qui sont les tangentes à la section en *m* et *n*, sont donc parallèles à l'horizontale UV dans l'espace et aussi en projection (I, 30) ; on obtient ainsi les tangentes *mt* et *nr*.

306. 2° On détermine, d'une manière analogue, les points situés sur les génératrices *sh* et *sk* aboutissant aux extrémités du diamètre *hk* de la base parallèle à UV. Pour cela, comme *hok* est parallèle à UV, le point α de la méthode générale (296) est alors rejeté à l'infini sur UV et la droite $o_1\alpha$ est remplacée par la parallèle po_1q menée par o_1 à la droite UV, d'où les points cherchés *p* et *q* à son intersection avec *sh* et *sk*.

Les tangentes en ces points s'obtiennent comme il a été indiqué (296) en menant les tangentes *hi* et *kj* à la base en *h* et *k* et en joignant respectivement les points *p* et *q* à leurs points de rencontre *i* et *j* avec UV ; on obtient ainsi les tangentes *pi* et *qj*.

307. *Construction des points sur les génératrices de contour apparent.* — 1° Pour avoir le point de la section situé sur la génératrice *s*(10)*e*(0), on considère le plan auxiliaire *s*(10)*o*(0)*e*(0) dont la trace horizontale *oe* coupe UV au point *a* ; la droite ao_1 coupe *se* au point *l* cherché. La tangente en *l* à la projection de la section est la droite *se* (118).

308. 2° Pour obtenir le point de la section situé sur la génératrice *s*(10)*f*(0), on ne peut utiliser le plan auxiliaire *s*(10)*f*(0)*d*(0) dont la trace horizontale *fo* rencontre la droite UV en dehors de l'épure.

On procède alors comme il a été indiqué (300). On remplace la droite auxiliaire SO_1O par la génératrice SLE qui détermine avec la génératrice SF un plan auxiliaire dont la trace horizontale *fe* rencontre UV au point φ. En joignant le point φ au point *l*, on

obtient la projection de la droite commune au plan auxiliaire et au plan sécant, qui coupe *sf* au point cherché *w*. La tangente à la section en ce point est la droite *sl* (153).

309. Si l'on suppose que la trace du plan auxiliaire tourne autour du point *o* en passant successivement par les points *d*, *h*, *e*, *g*, *k*, *f* de la base, on rencontre les points correspondants de la section dans l'ordre *m*, *p*, *l*, *n*, *q*, *w* où il faut les joindre (299).

310. *Ponctuation.* — On a ponctué l'épure en supposant le plan sécant transparent et la surface du cône opaque. On a représenté la section tracée sur la surface du cône.

311. Remarque. — Si l'épure comportait deux plans de projection, on effectuerait les constructions pour la projection horizontale, comme on vient de le faire ; la projection verticale s'en déduirait ensuite en rappelant sur la projection verticale les points trouvés (194). Mais il faudrait avoir soin, pour pouvoir ponctuer la projection verticale (279, 3°), de déterminer les points de la section situés sur les génératrices de contour apparent vertical.

312. Problème. — *Déterminer les points de la section plane d'un cône où la tangente est parallèle à une direction de ce plan.*

Soit un cône de sommet S et de base circulaire O dans un plan R (*fig.* 146) ; on le coupe par un plan R_1 et on veut trouver les points de la section où la tangente est parallèle à la direction Δ du plan R_1.

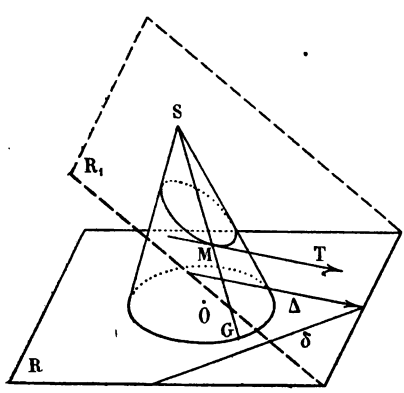


Fig. 146

Supposons le problème résolu et soit M un point de la section où la tangente MT est parallèle à Δ.

Le plan tangent au cône au point M contient la droite MT (182), il est par suite parallèle à Δ.

On obtiendra donc les tangentes cherchées en menant au cône les plans P tangents parallèles à Δ (234) et en prenant leur intersection

MT avec le plan R_1. Le point de contact M de la tangente ainsi déterminée est à l'intersection de la droite MT et de la génératrice de contact SG du plan P et du cône, génératrice qui s'obtient facilement dans la construction du plan P (234).

Si la base est circulaire, il y a au plus deux solutions, car la construction donne au plus deux plans P (234).

313. **Application.** — On peut de cette façon déterminer :

1° Les points de la section où la tangente est parallèle aux horizontales du plan ; ce sont les points *le plus haut* ou *le plus bas* de la section.

2° Les points où la tangente est parallèle aux droites de front du plan ; ce sont les points de la section *le plus en avant* ou *le plus en arrière* du plan vertical.

3° Les points où la tangente est parallèle aux lignes de plus grande pente relatives au plan horizontal.

4° Les points où la tangente est parallèle aux droites de profil du plan sécant ; ce sont les points *le plus à droite* ou *le plus à gauche* de la section.

314. **Problème.** — *Déterminer les points de la section plane d'un cône tels que la tangente en ces points ait sa projection horizontale parallèle à une direction donnée du plan horizontal.*

Soient δ la direction donnée dans le plan horizontal et R_1 le plan sécant (*fig.* 146). Comme δ est la projection d'une direction Δ du plan R_1, il est facile de définir cette direction Δ (I, 43 ou 112) en cherchant la projection verticale (ou la graduation) de la droite du plan R_1 projetée en δ. On est alors ramené au problème précédent.

Remarque. — On procède d'une manière analogue lorsqu'on se donne la direction de la projection verticale de la tangente.

§ II.

Détermination des points à l'infini dans les sections planes du cône.

315. Il peut arriver que le point de la section plane d'un cône soit rejeté à l'infini dans le plan sécant.

On a vu (279, 1°) que pour déterminer un point quelconque de la section, il suffit de chercher l'intersection d'une génératrice du cône et du plan sécant ; pour que leur point d'intersection soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que la génératrice soit parallèle au plan sécant. On dit alors que la génératrice est une *direction asymptotique ou infinie* de la section.

316. Par suite, pour trouver les *directions infinies* d'une section plane d'un cône, on est ramené à chercher les génératrices du cône parallèles au plan sécant. Ce problème a déjà été traité (222) et admet, suivant les cas, 0, 1 ou 2 solutions.

317. I. S'il n'y a pas de génératrice du cône parallèle au plan sécant, tous les points de la section sont à distance finie et la section est une *ellipse*.

318. II. S'il y a une seule génératrice SG du cône parallèle au plan sécant, la section qui n'a qu'une direction infinie est une *parabole* (Grévy, *Compléments de géométrie*, 646).

La génératrice SG donne, dans l'espace, la direction de l'axe de la parabole ; la projection d'une parabole sur un plan est, en général, une parabole dont *l'axe* a pour *direction* la projection *sg* de la génératrice SG sur le même plan.

Pour déterminer le *sommet* de la parabole, projection horizontale de la section, il suffit de chercher (314) le point de la section où la projection horizontale de la tangente est perpendiculaire à *sg*, direction de l'axe de cette projection. Le sommet une fois connu, on en déduit *l'axe* de la courbe.

319. III. Si deux génératrices du cône sont parallèles au plan

sécant, la section est une *hyperbole*, dont ces deux génératrices donnent les directions asymptotiques.

On détermine les *asymptotes*, en les considérant comme les tangentes à la section aux points rejetés à l'infini (Grévy, *Compléments de géométrie*, 652). Pour cela on applique la construction générale (279, 2°); on obtient donc ces droites en cherchant l'intersection du plan sécant avec les plans tangents au cône le long des génératrices parallèles au plan sécant.

Le point de rencontre des asymptotes est le *centre* de l'hyperbole et les projections de ce point sont les centres des deux hyperboles projections de la section.

On obtient les *sommets* de la projection horizontale, par exemple, en cherchant les points de la section où la tangente est en projection horizontale parallèle à la bissectrice de la projection horizontale de l'angle des asymptotes qui ne contient pas la courbe.

320. Application I. — *On donne un cône de sommet s(10) (fig. 147) de base circulaire o dans le plan horizontal. 1° Déterminer un plan coupant le cône suivant une parabole. 2° Construire le sommet de la projection de cette parabole.*

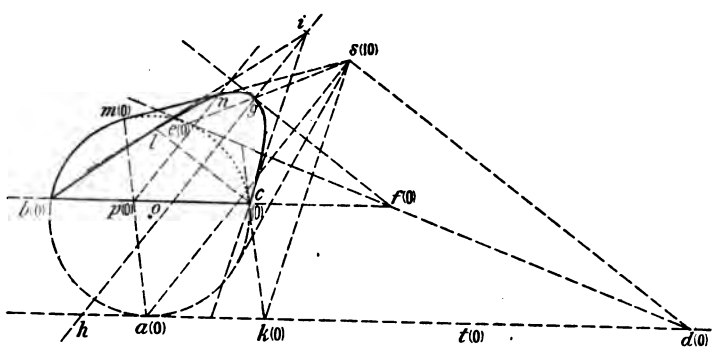


Fig. 147

1° *Détermination du plan sécant.* — Pour qu'un plan coupe un cône suivant une parabole, il faut et il suffit que le plan parallèle mené par le sommet coupe le cône suivant une seule génératrice (318), c'est-à-dire soit tangent au cône. Par suite, si on considère un plan tangent Q au cône le long de la génératrice $s(10)a(0)$ par exemple, tout plan P parallèle à celui-ci donne dans le cône une section para-

bolique. Le plan P est défini sur l'épure par sa trace horizontale $b(0)c(0)$, parallèle à la trace $a(0)t(0)$ du plan Q ; on verra par la suite comment on tient compte du parallélisme des deux plans P et Q.

321. 2° *Construction de l'axe et du sommet de la parabole projection.* — L'axe de la parabole projection est parallèle à la droite sa ; pour obtenir le sommet, il suffit donc de construire le point de la section où la projection de la tangente est perpendiculaire à sa (318).

Pour cela (314) menons par le point s la perpendiculaire sd à la droite sa et graduons cette droite comme la projection d'une droite située dans le plan Q ; il suffit pour cela de remarquer que la trace horizontale $d(0)$ de la droite est sur la trace $a(0)t(0)$ du plan Q. La droite $s(10)d(0)$ est la parallèle menée par le sommet $s(10)$ à la direction des plans P (ou Q) qui se projette perpendiculairement à sa. Pour mener les plans tangents au cône parallèlement à cette droite (312), il suffit de mener par d les tangentes à la base du cône (234) ; on obtient ainsi les génératrices de contact $s(10)a(0)$ et $s(10)e(0)$. La première, parallèle au plan sécant, donne le point à l'infini de la section ; le sommet de la section est le point d'intersection de la génératrice $s(10)e(0)$ avec le plan sécant (312) ; on détermine ce point en remarquant que le plan $s(10)d(0)ed(0)$ coupe le plan sécant suivant la parallèle à la droite $s(10)d(0)$ menée par le point de concours $f(0)$ des traces horizontales des deux plans (on tient compte ainsi du parallélisme des plans P et Q). Cette parallèle coupe la droite se au point g qui est la projection du sommet et dont la cote se détermine sur la droite $s(10)e(0)$.

La parallèle gh menée à la droite sa par le point g est l'axe de la parabole projection.

322. Pour construire la section, on remarque qu'elle passe par les points $b(0)$ et $c(0)$ communs à la base et à la trace horizontale du plan sécant. On a déterminé la tangente ci au point c en remarquant qu'elle est parallèle à la droite $s(10)k(0)$, intersection du plan P et du plan $s(10)c(0)k(0)$ tangent au cône au point $c(0)$.

On obtient un nouveau point l de la parabole et la tangente li en ce point en construisant les symétriques du point c et de la tangente ci par rapport à l'axe de symétrie gh.

323. Enfin, on a déterminé la projection du point n de la section situé sur la génératrice de contour apparent $s(10)m(0)$ à l'aide du

plan auxiliaire $s(10)m(0)a(0)$ qui coupe le plan sécant suivant la parallèle à la droite $s(10)a(0)$ menée par le point $p(0)$ commun à leurs traces horizontales. La tangente en n à la parabole projection est la génératrice sm (118).

324. *Ponctuation.* — On a représenté la partie du cône solide comprise entre le plan sécant et le plan horizontal et ne contenant pas le sommet.

325. **Application II.** — *Soit à trouver les asymptotes de la section du cône de sommet* (s, s') *et de base circulaire horizontale* o *par le plan* $P\alpha Q$ (*fig.* 148).

1° *Asymptotes.* — Pour obtenir les directions asymptotiques (316), cherchons les génératrices du cône parallèles au plan sécant. Pour cela (222), menons par le sommet (s, s') le plan parallèle au plan sécant ; la frontale $(sf, s'f')$ de ce plan menée par le point (s, s') a pour trace horizontale (f, f') et la trace horizontale du plan est la parallèle βR à la droite αP menée par le point f. Cette trace coupe la base aux points (a, a') et (b, b') et les génératrices du cône parallèles au plan sécant sont $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$.

L'asymptote parallèle à la droite $(sa, s'a')$ est l'intersection du plan tangent au cône le long de cette génératrice avec le plan sécant (319).

La trace horizontale de ce plan tangent est la tangente at à la base au point a ; le point (c, c') où elle rencontre la trace horizontale du plan sécant est un point de l'intersection cherchée ; comme on sait *a priori* que cette droite est parallèle à $(sa, s'a')$, on la détermine en menant la parallèle $(cg, c'g')$ à cette droite par le point (c, c').

Une construction analogue détermine l'asymptote $(dh, d'h')$ parallèle à la génératrice $(sb, s'b')$.

326. 2° *Centre de la section.* — Le point (ω, ω') commun aux deux asymptotes est le centre de l'hyperbole section et ses projections ω et ω' sont les centres des projections de même nom de cette section.

327. 3° *Points de la section et tangentes.* — La trace horizontale $(\alpha P, xy)$ du plan sécant coupe la base du cône aux points (i, i') et (e, e') qui appartiennent à la section.

En remarquant que la trace horizontale (iu, xy) du plan tangent

au cône au point (i, i') rencontre suivant la droite $(su, s'u')$ le plan

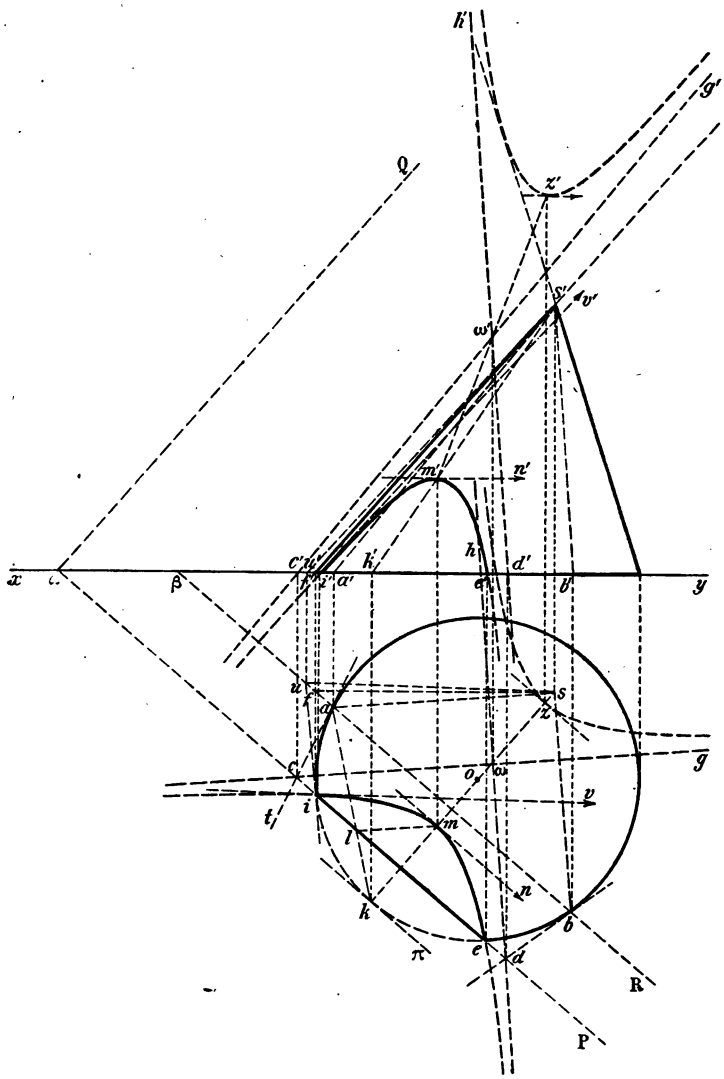


Fig. 148

mené par le sommet (s, s') parallèlement au plan sécant, on obtient son intersection avec le plan sécant, c'est-à-dire la tangente au point

(i, i'), en menant par ce point la droite (iv, $i'v'$) parallèle à la droite (su, $s'u'$).

Une construction analogue donnerait la tangente au point (e, e').

328. 4° *Point le plus haut de la branche d'hyperbole située sur la nappe inférieure du cône.* — Ce point est caractérisé sur la section par la direction de sa tangente qui est une horizontale du plan sécant (313, 1°).

Pour le déterminer (312), on mène au cône un plan tangent parallèle à la direction (αP, xy) des horizontales du plan sécant. La trace horizontale de ce plan est la tangente ($k\pi$, xy) à la base parallèle à la droite αP ; la génératrice de contact de ce plan et du cône est donc (sk, $s'k'$), dont l'intersection avec le plan sécant s'obtient à l'aide du plan auxiliaire (sak, $s'a'k'$). Les traces horizontales de ce dernier plan et du plan sécant se coupent au point l; l'intersection de ces plans tous deux parallèles à la droite (sa, $s'a'$) a donc pour projection horizontale la droite lm menée par l parallèlement à sa. Cette droite rencontre la projection horizontale sk de la génératrice au point m qui se rappelle en m' sur $s'k'$. Le point cherché est (m, m') et la tangente en ce point est l'horizontale du plan sécant (mn, $m'n'$).

329. Il est facile maintenant de tracer les projections de la branche d'hyperbole dont on connaît les asymptotes et trois points avec leurs tangentes.

On a représenté sur l'épure la portion de la nappe inférieure du cône située au-dessus du plan horizontal et au-dessous du plan sécant supposé transparent.

330. Remarque. — On a tracé les deux prolongements des arcs d'hyperbole ime et $i'm'e'$, pour mieux définir le tracé de ces arcs et figurer la disposition de la courbe.

On a figuré, en outre, les projections de la deuxième branche de l'hyperbole qui est située sur la nappe supérieure du cône ; il suffit pour les obtenir de construire les symétriques de l'arc ime par rapport au point ω et de l'arc $i'm'e'$ par rapport au point ω'.

Le point le plus bas (z, z') de cette branche est symétrique du point le plus haut (m, m') de la première par rapport au centre (ω, ω').

§ III.

Sections planes du cylindre.

331. I. La section d'un cylindre par un plan P *parallèle à ses génératrices* se compose de génératrices, qu'on détermine (217) en cherchant la trace AB du plan sécant P sur le plan de base Q (*fig.* 111) et en menant les génératrices MM′ et NN′ des points M et N où la droite AB rencontre la base.

332. II. Si la base est circulaire, la section par un *plan* P *parallèle à la base* est une circonférence égale à la base, dont le centre est le point O′ d'intersection du plan P et de la parallèle aux génératrices menée par le centre O de la base (*fig.* 149).

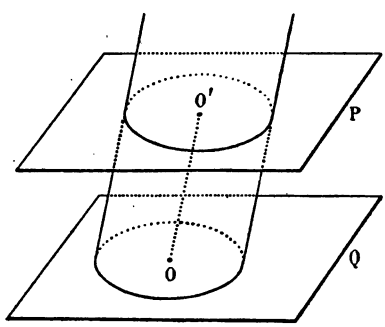


Fig. 149

333. III. La section par un plan *quelconque* est une ellipse; pour la définir sur une épure, on en construit un certain nombre de points et de tangentes par les procédés suivants :

1° On obtient un *point quelconque de la section* en cherchant l'intersection d'une génératrice quelconque du cylindre et du plan sécant.

2° La tangente en un point de la section est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface en ce point. Car le théorème du n° 153, démontré pour la section plane d'une sphère, s'applique mot pour mot à la section plane du cylindre.

3° On obtient les *points sur les génératrices de contour apparent* en cherchant leur point d'intersection avec le plan sécant.

La projection de la section est tangente à la projection de même nom du contour apparent de même nom aux points où elle le rencontre (118).

La recherche de ces points est capitale, au point de vue de la ponctuation, car ils séparent sur la section les arcs vus des arcs cachés.

Remarque. — On peut aussi obtenir un *point quelconque de la section* par la méthode signalée pour la sphère (152) et le cône (279).

Si la base circulaire du cylindre est horizontale, on emploie un plan horizontal auxiliaire qui coupe le cylindre suivant un cercle C facile à déterminer (332) et le plan sécant suivant une horizontale ; les points communs à cette droite et au cercle C sont manifestement des points de la section.

Si la base circulaire du cylindre est dans un plan de front, on utilise d'une manière analogue un plan auxiliaire de front.

334. **Cas particulier.** — *Le plan sécant est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Exemple. — Soit à trouver la section par le plan vertical PαQ du cylindre de base circulaire horizontale (o, o') et de génératrices parallèles à la direction $(o\delta, o'\delta')$ (*fig.* 150).

La section située dans le plan vertical se projette horizontalement sur la trace horizontale αP de ce plan (I, 129, 6°) ; comme les points du cylindre se projettent horizontalement entre les génératrices de contour apparent ab et cd, (205) la projection horizontale de la section est le segment mn.

335. 1° *Recherche d'un point quelconque de la section et de la tangente en ce point.*

Considérons le point de la section projeté horizontalement en p sur mn et cherchons sa projection verticale ; pour cela (204), menons la projection horizontale pq de la génératrice du point cherché qui rencontre la base aux points (q, q') et (r, r'). Les génératrices du point cherché ont pour projection verticale $q'p'_1$ et $r'p'_2$ qui coupent la ligne de rappel du point p aux points cherchés p'_1 et p'_2.

Pour obtenir la tangente à la section au point (p, p'_2), construisons le plan tangent au cylindre en ce point ; il est défini (190) par la génératrice (pr, p'_1r') et la tangente $(rt, r't')$ à la base au point (r, r'). La tangente cherchée est l'intersection de ce plan et du plan sécant (333, 2°) ; on connaît *a priori* un point de cette intersection en (p, p'_1), on en obtient un deuxième en (t, t') à l'intersection des traces horizontales rt et Pα des deux plans. La tangente cherchée est donc la droite (pt, p'_1t').

336. 2° *Points sur le contour apparent horizontal.* — L'intersection

du plan sécant et des génératrices (am, $a'm'$) et (bn, $b'n'$) de contour apparent horizontal s'obtient en (m, m') et (n, n').

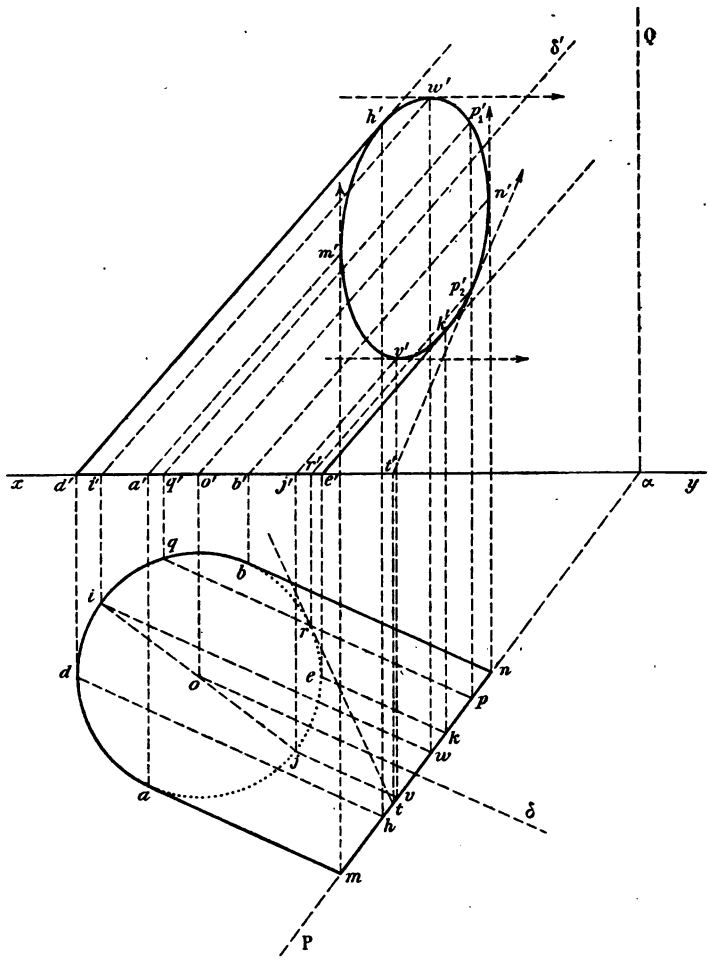


Fig. 150

Les plans tangents le long de ces génératrices sont verticaux (258); par suite leurs intersections avec le plan sécant sont les verticales m et n ; les tangentes à la projection verticale de la section aux points m' et n' sont donc les droites mm' et nn' (153). On obtient ainsi les *points* de la section *le plus à droite* et *le plus à gauche*.

337. 3° *Points sur le contour apparent vertical.* — Les génératrices de contour apparent vertical (dh, $d'h'$) et (ek, $e'k'$) coupent le plan sécant aux points (h, h') et (k, k').

Les tangentes à la projection verticale de la section aux points h' et k' sont les projections $d'h'$ et $e'k'$ des génératrices de contour apparent (118).

338. 4° *Points le plus haut et le plus bas de la section.* — Ce sont les points où la tangente est horizontale (313) ; comme cette droite est dans le plan sécant, elle a même direction que l'horizontale (αP, xy) de ce plan.

Pour l'obtenir, on procède comme il a été déjà indiqué pour le cône (312) ; on construit les plans tangents au cylindre parallèles à la droite (αP, xy) ; pour cela, il suffit de mener les tangentes à la base parallèles à αP ; leurs points de contact avec la base sont les extrémités du diamètre ioj perpendiculaire à αP ; les génératrices des points (i, i'), (j, j') coupent le plan sécant aux points cherchés (w, w') et (v, v').

Il est alors facile de tracer la projection verticale de la section. On a représenté sur l'épure la partie du cylindre comprise entre le plan sécant supposé transparent et le plan horizontal.

339. **Cas général. — Première méthode.** — On ramène le cas où le plan sécant est quelconque à celui où il est perpendiculaire à l'un des plans de projection *en changeant l'un des plans de projection de façon que le plan sécant soit perpendiculaire au nouveau plan de projection dans le nouveau système* (I, 244) *ou* (23).

On procède comme dans le cas du cône ; nous laissons au lecteur le soin de faire l'épure ; il lui suffira d'exécuter des constructions analogues à celles des n°s 237 et suivants.

340. **Deuxième méthode.** — On peut procéder comme il a été fait pour la section plane d'un prisme (I, 293).

Soit, par exemple, à chercher l'intersection avec le plan R_1 du cylindre de base circulaire (Γ) dans le plan R (*fig.* 151) et de génératrices parallèles à la direction G .

1° Cherchons la droite d'intersection UV du plan sécant R_1 et du plan de base R.

2° Menons, d'une façon arbitraire, une parallèle OO_1 à la direc-

tion G des génératrices et déterminons sa trace O sur le plan de base et sa trace O_1 sur le plan sécant.

3° Pour trouver l'intersection des génératrices du cylindre avec le

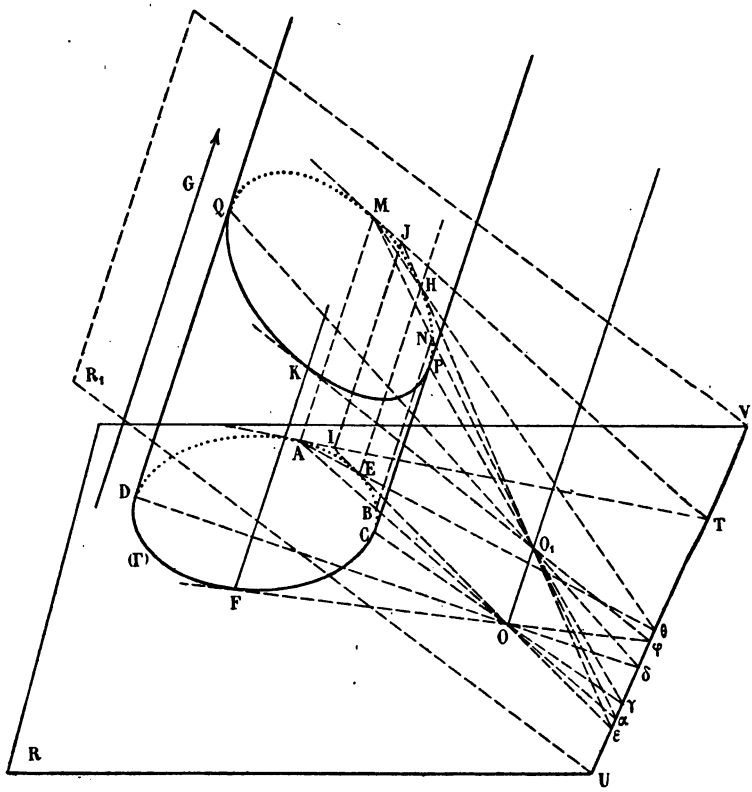


Fig. 151

plan R_1, nous emploierons des plans auxiliaires déterminés successivement par la droite OO_1 et chacune des génératrices. Ces plans sont ainsi définis par deux droites parallèles.

Il suffit alors pour obtenir la courbe d'intersection par points et par tangentes de répéter, mot pour mot, les constructions indiquées aux n°s 296 et suivants à propos de la section plane du cône.

Les remarques faites aux n°s 300, 301, 302 sont également applicables à la recherche des sections planes du cylindre.

341. **Application I.** — *On définit un cylindre par sa base circu-*

laire (o, o') *dans le plan vertical et la direction* (og, o'g') *de ses géné-*

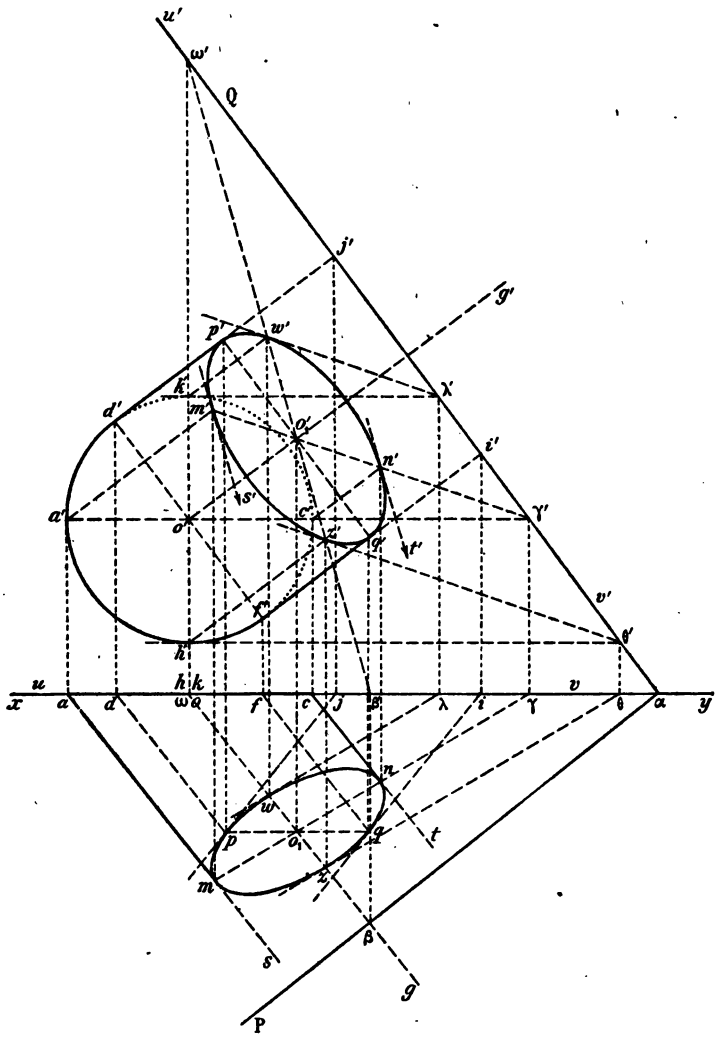


Fig. 152

ratrices (*fig.* 152). *Soit à construire les projections d'une section droite du cylindre, c'est-à-dire d'une section par un plan perpendiculaire à la direction des génératrices.*

Pour définir les traces du plan sécant, on a mené par un point α de la ligne de terre les perpendiculaires αP et αQ aux projections og et $o'g'$ de la direction des génératrices (I, 169).

La droite d'intersection du plan de base et du plan sécant est évidemment la trace verticale (αQ, xy) de celui-ci, que nous appellerons (uv, $u'v'$) pour garder les notations du n° 340.

Prenons comme droite auxiliaire la parallèle (og, $o'g'$) aux génératrices passant par le centre (o, o') de la base; elle perce le plan de base au point (o, o') et le plan sécant au point (o_1, o'_1) qu'on a déterminé à l'aide du plan vertical projetant la droite et de son intersection ($\omega\beta$, $\omega'\beta'$) avec le plan sécant. C'est par cette droite (oo_1, $o'o'_1$) que nous allons faire passer des plans auxiliaires pour déterminer les points de la section.

342. 1° *Points sur le contour apparent horizontal.* — Les génératrices de contour apparent horizontal sont celles des points (a, a') et (c, c') (273); comme ces points sont diamétralement opposés sur la base, ils sont dans un même plan avec la droite auxiliaire (oo_1, oo'_1); ce plan a pour trace verticale $a'o'c'$ qui rencontre en (γ, γ') la droite (uv, $u'v'$); la trace du plan auxiliaire sur le plan sécant est la droite (γo_1, $\gamma' o'_1$) qui rencontre les génératrices des points (a, a') et (c, c') aux points cherchés (m, m') et (n, n').

Les tangentes à la projection horizontale de la section en m et n sont les projections ams et cnt des génératrices de ces points (118).

Les tangentes à la projection verticale de la section en m' et n' sont les projections verticales des droites du plan sécant projetées horizontalement en ms et nt; en remarquant que ces droites sont parallèles à $\omega\beta$ projection horizontale de la droite ($\omega\beta$, $\omega'\beta'$) du plan sécant, on conclut que les tangentes cherchées $m's'$ et $n't'$ sont parallèles à $\omega'\beta'$.

343. 2° *Points sur le contour apparent vertical.* — Les génératrices de contour apparent vertical sont celles des points (d, d') et (f, f') (273); leurs projections verticales $d'j'$, $f'i'$ sont tangentes à la projection verticale de la base. Le plan auxiliaire de trace verticale $d'o'f'$ les contient toutes deux; comme cette trace est perpendiculaire à la direction $o'g'$, elle est parallèle à la trace verticale αQ du plan sécant et par suite (I, 152) ces deux plans ont pour intersection la frontale (po_1q, $p'o'_1q'$) du plan sécant passant par le point (o_1, o'_1);

on obtient les points cherchés (p, p') et (q, q') à l'intersection de cette droite et des génératrices des points (d, d') et (f, f').

Les tangentes à la projection verticale aux points p' et q' sont les génératrices $d'p'$ et $f'q'$ (118).

La tangente à la projection horizontale au point q s'obtient par la méthode indiquée au n° 296 en prenant le point d'intersection (i, i') de la droite $(uv, u'v')$ et de la trace $f'i'$ du plan tangent en (q, q') sur le plan de base. En joignant le point q au point i, on a la tangente cherchée qi.

Comme les plans tangents au cylindre en (q, q') et (p, p') sont parallèles, il en résulte que les tangentes à la section en ces points sont parallèles comme intersections du plan sécant par deux plans parallèles. On obtient donc la tangente au point p de la projection horizontale en menant la droite pj parallèle à qi.

344. 3° *Point quelconque et tangente en ce point.* — Considérons le plan auxiliaire de trace verticale $k'o'h'$ perpendiculaire à xy. Il coupe le cylindre suivant les génératrices des points (h, h') et (k, k') et le plan sécant suivant la droite $(\omega o_1, \omega' o'_1)$; les points de rencontre (w, w') et (z, z') de ces droites sont deux points de la section.

Les plans tangents en ces points ont pour traces verticales les tangentes à la base aux points (h, h') et (k, k') qui rencontrent la droite $(uv, u'v')$ aux points (θ, θ') et (λ, λ'). Les tangentes aux points (z, z') et (w, w') sont donc les droites $(z\theta, z'\theta')$ et $(w\lambda, w'\lambda')$ (332, 2°).

345. *Jonction des points obtenus.* — Si la trace verticale du plan auxiliaire tourne autour du point o'_1 et passe successivement par les points $a'h'f'c'k'd'$ de la base, les projections verticales des points correspondants construits sur la section se succèdent dans l'ordre $m'z'q'n'w'p'$ où il faut les joindre. En projection horizontale, on les joint naturellement dans le même ordre.

Ponctuation. — On a ponctué la portion du cylindre, supposé solide, comprise entre le plan vertical et le plan sécant, en supposant le plan sécant *transparent*.

346. Remarques. — I. En prenant pour droite auxiliaire OO_1 la parallèle aux génératrices menée par le centre de la base circulaire du cylindre, on a mis en évidence l'existence du *centre de symétrie* O_1 de la section. En effet, le quadrilatère déterminé par les quatre points

(h, h'), (w, w'), (z, z'), (k, k') a pour côtés deux génératrices du cylindre, c'est donc un trapèze et la droite $(oo_1, o'o'_1)$ menée parallèlement aux bases par le milieu (o, o') de $(hk, h'k')$, passe par le milieu (o_1, o'_1) de l'autre côté $(wz, w'z')$; le point (o_1, o'_1) est donc un centre de symétrie pour la section.

La section est d'ailleurs une *ellipse* et les tangentes aux extrémités d'un diamètre quelconque $(wz, w'z')$ sont parallèles.

347. II. Dans l'épure précédente, le choix particulier du plan sécant permet de déterminer les axes de la projection verticale de la section.

En effet, le diamètre $p'q'$ est un axe de cette projection, car les tangentes à ses extrémités $p'j'$ et $q'i'$ lui sont perpendiculaires. L'autre axe de la projection est donc dirigé suivant la droite o'_1g' ; on déterminerait facilement les sommets situés sur cet axe à l'aide du plan auxiliaire de trace verticale $o'g'$ qui contient les génératrices du cylindre projetées verticalement suivant $o'g'$.

EXERCICES

1. Trouver sur la section plane d'un cône (ou d'un cylindre) à base circulaire horizontale (ou de front) les points :

1° de cote donnée ;

2° d'éloignement donné (on appliquera dans chacun de ces cas la méthode du n° 279 ou 333, Rem.).

2. On donne un cône à base circulaire horizontale et une droite ; déterminer les plans passant par la droite et donnant dans le cône une section parabolique.

3. On donne un cône à base circulaire horizontale et un point (a, a'). Mener par ce point les plans donnant dans le cône des sections circulaires et construire ces sections. (Il y a deux tels plans, l'un parallèle au plan de base, l'autre donnant une section antiparallèle à la base; voir Grévy, *Compléments de Géométrie*, 597.

(*Saint-Cyr.*)

4. Construire la section d'un cône ou d'un cylindre à base circulaire horizontale :

1° par le deuxième plan bissecteur ;

2° par un plan parallèle au deuxième plan bissecteur.

5. Un segment $(ab, a'b')$ est l'axe d'un tronc de cône de révolution dont on donne les rayons des bases situées dans les plans menés

par (a, a') et (b, b') perpendiculairement à l'axe. Représenter les projections du tronc de cône. Construire le sommet du cône dont le tronc fait partie.

6. On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal. On le coupe par un plan de bout parallèle à une génératrice de contour apparent vertical. La section est une parabole dont on demande de trouver le sommet de la projection horizontale.

7. Un cercle o donné dans le plan horizontal est la base d'un cône C_1 de sommet (s, s'). Un plan $P\alpha Q$ défini par ses traces coupe le cône C_1 suivant une courbe qui est la base d'un cône C_2 de sommet (t, t').

1° Construire un point quelconque de la section du cône C_2 par un plan $R\beta S$ défini par ses traces et la tangente en ce point.

2° Trouver sur cette section le point le plus haut et le point le plus bas, le point le plus à droite et le point le plus à gauche.

8. On donne un cercle C_1 dans le plan horizontal, un plan vertical P et trois points A, B, C. Le cône de sommet A et de base C_1 coupe le plan P suivant une courbe C_2. Le cône de sommet B et de directrice C_2 coupe le plan horizontal suivant une courbe C_3 et enfin le cône de sommet C et de directrice C_3 coupe le plan P suivant la courbe C_4.

1° Construire un point quelconque de C_4 et la tangente en ce point.

2° Trouver le point le plus à droite et le point le plus à gauche de C_4.

9. On donne un cône à base circulaire horizontale et une droite. Mener par la droite un plan coupant le cône suivant une section dont la droite est un diamètre.

CHAPITRE X

CONES ET CYLINDRES CIRCONSCRITS A LA SPHÈRE

---

§ I.

Cône circonscrit.

348. On a déjà rappelé (115, 6°) les propriétés géométriques du cône circonscrit à la sphère par un point.

349. Détermination des contours apparents. — Théorème. — 1° *Si le cercle de contact d'un cône circonscrit à une sphère rencontre en un point* M *le contour apparent de la sphère relatif à un plan* P, *ce point* M *appartient au contour apparent du cône relatif au même plan.*

2° *Les projections sur le plan* P *des deux contours apparents et du cercle de contact sont tangentes au point m, projection du point* M.

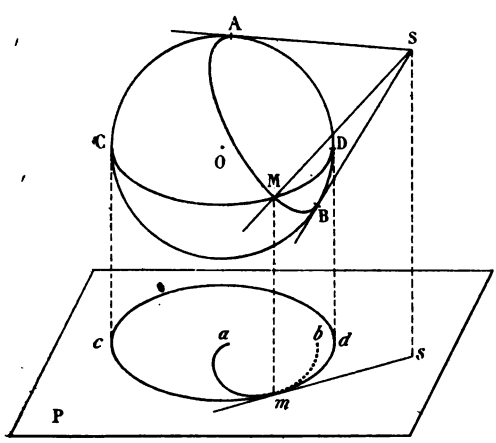


Fig. 153

Considérons en effet le cône circonscrit par un point S à une sphère de centre O

et soit M un point commun au cercle de contact AB du cône et de la sphère et au cercle CD de contour apparent de la sphère relativement au plan P (*fig.* 153).

1° Puisque le point M est sur le contour apparent de la sphère relatif au plan P, le plan tangent à la sphère en ce point est perpendiculaire au plan P (116). Comme le point M est sur le cercle de contact de la sphère et du cône, le plan tangent à la sphère est aussi tangent au cône (115, 6°); le plan tangent au cône au point M est donc perpendiculaire au plan P et le point M appartient bien au contour apparent du cône relatif au plan P (258). Ce contour apparent comprend par suite la génératrice SM (259).

2° La projection *ab* du cercle de contact AB sur le plan P est tangente en *m* aux projections *cd* et *sm* des contours apparents de la sphère et du cône, d'après le théorème du n° 118 qu'on applique à la fois au cône et à la sphère.

350. Comme la projection *sm* de la génératrice SM passe par la projection *s* du sommet du cône, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les projections des contours apparents d'un cône circonscrit à une sphère s'obtiennent en menant aux contours apparents de la sphère les tangentes par les projections de même nom du sommet de ce cône.*

351. Remarque. — Le raisonnement qui vient d'être fait n'utilise que les hypothèses de l'énoncé, la définition et les propriétés du contour apparent ; les propriétés de la sphère n'y sont pas intervenues ; par suite, le théorème s'applique encore lorsqu'on remplace la sphère par une surface quelconque.

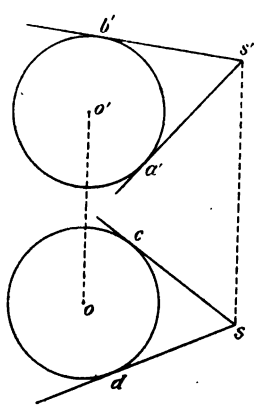


Fig. 154

352. Exemple. — Soit une sphère définie par son centre (*o*, *o'*) et ses contours apparents (*fig.* 154). Le cône circonscrit à cette sphère par le point (*s*, *s'*) a pour contour apparent vertical les deux génératrices projetées verticalement en *s'a'*, *s'b'* et obtenues en menant les tangentes à la circonférence *o'* par le point *s'*.

De même, le contour apparent horizontal s'obtient en menant par

la projection horizontale *s* du sommet les tangentes *sc* et *sd* au cercle *o* de contour apparent horizontal.

353. Remarque. — Les constructions précédentes ne sont pas toujours possibles.

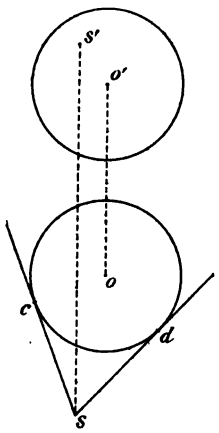


Fig. 155

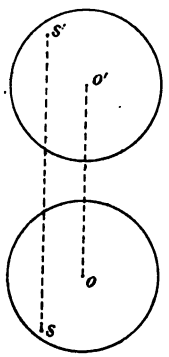


Fig. 156

Ainsi, dans l'épure de la figure 155, le cône a encore un contour apparent horizontal projeté en *sc* et *sd*, mais il n'a plus de contour apparent vertical, car le point *s'* se projette à l'intérieur du cercle *o'*.

Dans l'épure de la figure 156, le cône n'a ni contour apparent horizontal, ni contour apparent vertical, car chacune des projections du sommet (*s*, *s'*) se trouve à l'intérieur de la projection du contour apparent de même nom de la sphère bien que ce sommet soit extérieur à la sphère (138).

354. **Détermination du cercle de contact du cône et de la sphère.** — Méthode. — Le plan P du cercle de contact du cône et de la sphère est perpendiculaire à la droite qui joint le sommet S du cône au centre O de la sphère (115, 6°). Pour trouver la section de la sphère par ce plan P, il est commode de changer de plan vertical pour amener le plan P à être de bout, car on est alors ramené à un cas particulier donnant des constructions simples (154). Ce changement de plan rend la droite SO de front dans le nouveau système de projections.

355. **Exemple.** — Soit à déterminer les projections du cercle de contact de la sphère (*o*, *o'*) et du cône circonscrit à cette sphère par le point (*s*, *s'*) (*fig.* 157).

I. Projection horizontale. — Le contour apparent horizontal du cône s'obtient en menant par la projection horizontale *s* du sommet les tangentes *sa* et *sb* au contour apparent horizontal de la sphère (350).

Changeons de plan vertical en prenant une nouvelle ligne de terre

x_1y_1 confondue avec la projection horizontale *so* de l'axe du cône et en même temps prenons comme nouveau plan horizontal de projec-

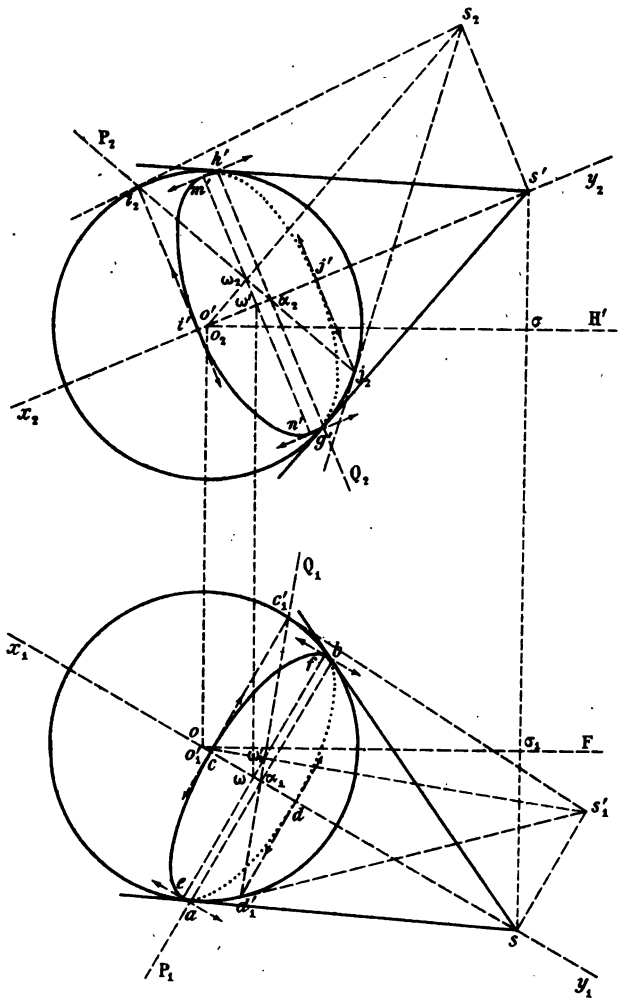


Fig. 157

tion le plan horizontal H' qui passe par le centre (o, o') de la sphère.

Le centre de la sphère se trouve ainsi sur la nouvelle ligne de terre, ses projections sont confondues en (o, o'); par suite le contour appa-

rent vertical de la sphère dans le nouveau système est confondu avec le contour apparent horizontal (135).

Le point (s, s') a sa nouvelle projection verticale sur la perpendiculaire menée par s à x_1y_1 et à une distance ss'_1 égale à sa distance $s'\sigma$ au nouveau plan horizontal H′ de projection. L'axe du cône est la droite $(so, s'_1o'_1)$. Le plan du cercle de contact a pour trace horizontale dans le nouveau système la droite $P_1\alpha_1$ qui coïncide avec ab, car les points de la sphère projetés horizontalement en a et b sont sur le contour apparent horizontal de la sphère et par suite dans le plan H′; sa trace verticale est par suite la perpendiculaire α_1Q_1 menée à la droite $s'_1o'_1$ par le point α_1, car le plan est perpendiculaire à l'axe du cône $(so, s'_1o'_1)$.

Pour construire la projection horizontale de la section de la sphère (o, o'_1) par le plan de bout $P_1\alpha_1Q_1$, on procède comme il a été indiqué au n° 154. La section est projetée verticalement suivant le segment $c'_1d'_1$ de la trace verticale du plan compris à l'intérieur du contour apparent vertical de la sphère. Son centre est le point (ω, ω'_1) commun au plan $P_1\alpha_1Q_1$ et à l'axe $(so, s'_1o'_1)$ du cône. Le petit axe de l'ellipse projection est dirigé suivant la droite ωs perpendiculaire à la trace horizontale αP du plan et les sommets situés sur cet axe s'obtiennent en c et d en rappelant sur cet axe les points projetés verticalement en c'_1 et d'_1 à l'intersection de la trace verticale α_1Q_1 et du contour apparent vertical de la sphère. Le grand axe de l'ellipse est dirigé suivant la perpendiculaire $\omega\omega'_1$ au petit axe et a même longueur que le diamètre $c'_1d'_1$ du cercle de contact ; on obtient ses sommets en e et f en prenant les longueurs $\omega e = \omega f = \omega'_1c'_1$.

On peut alors tracer l'ellipse projection en remarquant qu'elle passe aux points a et b où elle est tangente aux droites sa et sb (349).

356. Remarque. — On s'est servi pour construire la trace verticale $Q_1\alpha_1$ du plan du cercle de contact du contour apparent horizontal du cône. Il peut arriver que ce contour apparent n'existe pas (353) ; dans ce cas, on détermine le contour apparent vertical du cône $s'_1c'_1$, $s'_1d'_1$ en menant par le point s'_1 les tangentes au contour apparent vertical de la sphère dans le système x_1y_1 (350) ; comme le plan de la courbe de contact est de bout dans ce système, sa trace verticale αQ_1 coïncide avec la droite $c'_1d'_1$ qui joint les projections verticales de deux de ses points. Cette construction est toujours possible, car on suppose le point (s, s'_1) extérieur à la sphère et par suite s'_1 est à

l'extérieur du contour apparent de la sphère, car la distance $o'_1 s'_1$ est la vraie grandeur de la distance des deux points (o, o'_1), (s, s'_1) qui est alors plus grande que le rayon.

357. II. Projection verticale. — Une construction analogue à la précédente donne les axes de l'ellipse projection verticale du cercle de contact.

On prend comme nouveau plan horizontal le plan de bout de trace x_2y_2 confondue avec $o's'$ et comme plan vertical le plan de front F passant par le centre (o, o') de la sphère. Le centre de la sphère est défini dans ce nouveau système par ses deux projections (o_2, o'); les deux contours apparents de la sphère sont confondus suivant la circonférence o'. Le sommet du cône a pour nouvelles projections s_2 et s'; s_2 est sur la perpendiculaire à x_2y_2 menée par s' et à une distance égale à $s\sigma_1$, nouvel éloignement du point. Le cône a pour contour apparent vertical les tangentes $s'g'$, $s'h'$ menées par le point s' au contour apparent de même nom de la sphère (350); le plan de la courbe de contact a pour trace verticale la droite α_2Q_2 confondue avec $g'h'$ et pour trace horizontale la droite α_2P_2 menée par le point α_2 perpendiculaire à la droite s_2o_2. La section est projetée horizontalement suivant le segment i_2j_2 de la trace horizontale du plan sécant compris à l'intérieur du contour apparent horizontal de la sphère. Son centre est le point (ω_2, ω'); le petit axe de l'ellipse projection est dirigé suivant la droite $\omega's'$ et ses sommets sont les projections verticales i' et j' des points i_2 et j_2, situés à l'intersection de la trace horizontale α_2P_2 du plan et du contour apparent horizontal de la sphère; le grand axe $m'n'$ est sur la perpendiculaire menée par le point ω' à la droite x_2y_2 et a même longueur que le diamètre i_2j_2 du cercle de contact.

La ponctuation a été faite en supposant le cône transparent.

358. Remarques. — I. On aurait pu déterminer la trace horizontale α_2P_2 du plan de la courbe de contact dans le système x_2y_2 en menant par le point s_2 les tangentes s_2j_2 et s_2i_2 au contour apparent o_2 de la sphère dans ce système. La trace cherchée est la droite qui joint les points i_2 et j_2.

On aurait pu déterminer un point quelconque du cercle de contact et la tangente en ce point par la construction indiquée au n° 154, 4°.

359. II. Comme on a construit les deux projections indépendamment l'une de l'autre, on pourra vérifier : 1° que les deux projections du centre ω et ω' sont sur une même ligne de rappel; 2° que les longueurs $c'_1d'_1$ et i_2j_2 sont égales, car toutes deux représentent le diamètre du cercle de contact.

360. Dans le cas particulier où le point (s, s') est sur la verticale du centre (o, o') (*fig.* 158), l'axe $(so, s'o')$ du cône est vertical et le plan du cercle de contact est par suite horizontal. Ce plan H' a pour trace verticale la droite $a'b'$ qui joint les deux points a' et b' communs aux contours apparents verticaux du cône et de la sphère.

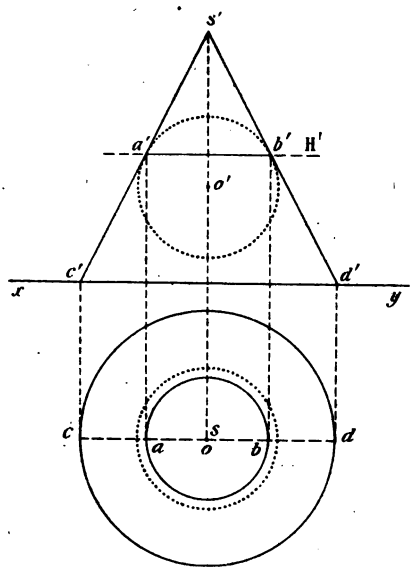


Fig. 158

Le cercle de contact est le parallèle horizontal de la sphère situé dans le plan H' ; il se projette verticalement suivant le segment $a'b'$ et horizontalement suivant le cercle de centre o et de rayon oa (125). La ponctuation a été faite en supposant la surface du cône opaque.

361. **Application I.** — *Mener par une droite donnée les plans tangents à une sphère donnée.*

Ce problème a déjà été résolu (173) ; on peut aussi le résoudre à l'aide de cônes circonscrits à la sphère.

Solution géométrique. — Soit P un plan tangent en M à la sphère O et passant par la droite D (*fig.* 159). D'après une propriété de la courbe de contact d'un cône circonscrit à la sphère (115, 6°), le point M est situé sur la courbe de contact (C) de la sphère et du cône circonscrit qui a son sommet en un point *quelconque* de la droite D ; le plan P est d'ailleurs tangent à ce cône.

362. De là résultent deux procédés pour la construction du point de

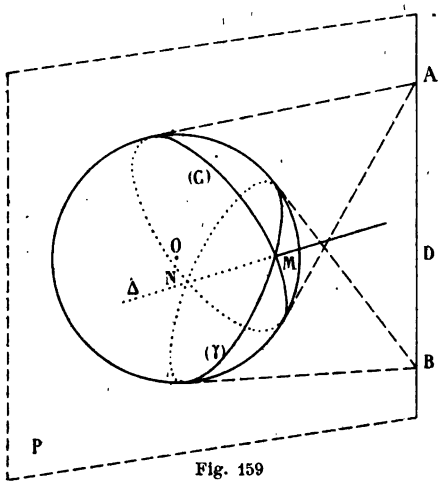


Fig. 159

contact M : 1° on prend sur la droite D deux points quelconques A et B et on cherche les points M et N communs aux cercles de contact avec la sphère des cônes circonscrits de sommets A et B. Il suffit pour cela de chercher la droite Δ d'intersection des plans de ces deux cercles, puis les points communs à cette droite et à la sphère.

363. 2° Ou bien on considère le cône circonscrit à la sphère de sommet A et on lui mène les plans tangents par la droite D; ce qui donne les plans cherchés.

364. Remarque. — Si le point B s'éloigne indéfiniment sur la droite, le cône circonscrit de sommet B a pour limite le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à la droite D. Ce cylindre peut remplacer l'un des cônes précédents.

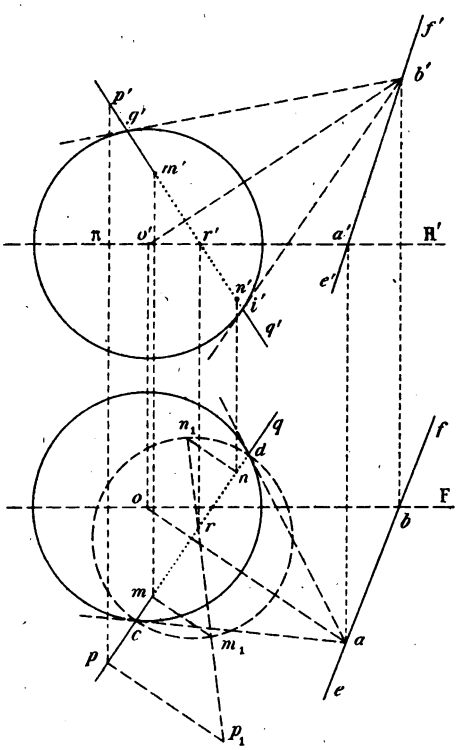


Fig. 160

365. **Problème I.** — *Soit à mener à la sphère définie par son centre* (*o*, *o'*) *et ses deux contours apparents les plans tangents par la droite* (*ef*, *e'f'*) (*fig.* 160).

Employons le premier procédé indiqué (362). Mais profitons de l'indétermination des deux points A et B sur la droite D pour simplifier les constructions.

1° Prenons sur la droite (*ef*, *e'f'*) le point (*a*, *a'*) dans le plan horizontal H'

du centre (o, o') de façon que le cône circonscrit de sommet (a, a') ait son axe horizontal en $(ao, a'o')$. Le plan de son cercle de contact avec la sphère qui est perpendiculaire à l'axe (115, 6°) est par suite vertical. En menant les génératrices ac et ad de contour apparent horizontal du cône (350), on obtient en c et d les projections horizontales de deux points de la courbe de contact; la trace horizontale du plan de cette courbe est donc la droite cd (I, 129, 4°).

2° De même, prenons sur la droite $(ef, e'f')$ le point (b, b') situé dans le plan de front F du centre (o, o') de façon que le cône circonscrit de sommet (b, b') ait son axe $(bo, b'o')$ de front.

Le plan du cercle de contact avec la sphère qui est perpendiculaire à l'axe (115, 6°) est par suite de bout. En menant les génératrices $b'g'$, $b'i'$ de contour apparent vertical (350), on obtient en g' et i' les projections verticales de deux points de la courbe de contact, la trace verticale du plan de cette courbe est donc la droite $g'i'$ (I, 130, 4°).

La droite d'intersection du plan vertical de trace horizontale cd et du plan de bout de trace verticale $g'i'$ a ses projections $(pq, p'q')$ confondues respectivement avec cd et $g'i'$. Pour trouver les points communs à cette droite et à la sphère, on a rabattu sur le plan horizontal H' du centre le plan vertical de trace cd (145). La section de la sphère par ce plan se rabat suivant la circonférence de diamètre cd ; le point (r, r') de la droite situé sur la charnière ne bouge pas ; le point (p, p') se rabat en p_1 obtenu en portant sur la perpendiculaire à pq la longueur pp_1 égale à $p'\pi$. Le rabattement rp_1 de la droite coupe la circonférence en m_1 et n_1 ; on relève ces points en (m, m') et (n, n') qui sont les points de contact cherchés.

366. **Problème II.** (*Géométrie cotée*) — *Soit à mener par la droite* $b(o)a(4)$ *les plans tangents à la sphère définie par son centre* $o(4)$ *et son rayon* (*fig.* 161).

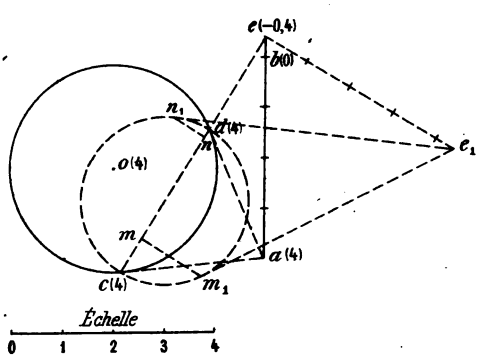


Fig. 161

Employons le deuxième procédé indiqué (363). Prenons sur la droite $b(o)a(4)$ le point $a(4)$ qui a la même cote que le centre de manière que l'axe du cône circonscrit à la sphère par ce point ait son axe $a(4)o(4)$ horizontal et que son cercle de contact soit par suite vertical. En menant les génératrices ad et ac de contour apparent du cône (350), on obtient en c et d les projections de deux points de la courbe de contact, dont le plan a par suite pour trace horizontale la droite cd. La base du cône située dans ce plan a pour diamètre le segment $c(4)d(4)$.

Il reste à mener les plans tangents au cône par la droite $a(4)b(0)$. Pour cela (229), on prend d'abord le point d'intersection de la droite et du plan vertical cd, point projeté en e à l'intersection de ab et de cd et dont la cote est sensiblement (— 0,4).

Pour mener par le point e(— 0,4) les tangentes à la base du cône, on rabat le plan vertical cd sur le plan horizontal de cote 4 ; la base du cône se rabat suivant la circonférence de diamètre cd ; le point e se rabat en e_1 à la distance ee_1 de la charnière égale à 4,4 unités de l'échelle. De e_1 on mène les tangentes e_1m_1, e_1n_1 au rabattement de la base ; les points m_1 et n_1 se relèvent en m et n de cotes respectives ($4 - mm_1$) et ($4 + nn_1$), qui sont les points de contact cherchés.

367. Remarques. — I. La solution précédente est en défaut si la droite est horizontale, car il n'y a plus sur elle un point ayant la cote du centre. On utilise alors le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à la droite (364). Nous laissons au lecteur le soin de faire l'épure.

II. Dans le cas où la droite donnée a un point commun avec la verticale ou la droite de bout passant par le centre de la sphère, on a intérêt à prendre le point commun pour sommet du cône circonscrit, car alors le cône a son axe perpendiculaire à un plan de projection et sa base se projette sur ce plan suivant un cercle (360).

368. **Application II.** — *Les plans tangents à une sphère qui font un angle donné avec un plan* P *sont tangents à l'un ou l'autre de deux cônes circonscrits à cette sphère.*

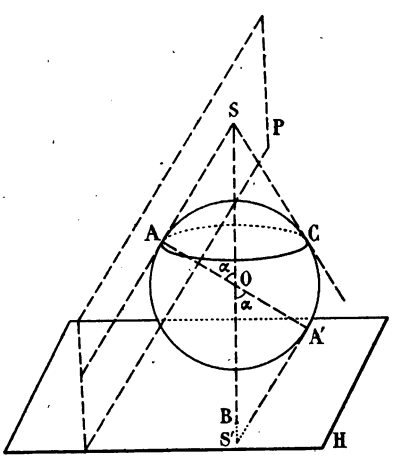


Fig. 162

En effet, soit un plan P tangent au point A à une sphère de centre O et qui fait avec un plan donné H un angle donné α. Abaissons du centre O sur le plan H la perpendiculaire OB qui rencontre le plan P au point S. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la surface de la sphère tourne sur elle-même, le plan P reste tangent à la sphère pendant la rotation, de plus il fait avec le plan H un angle constant (42), qui est l'angle α ; et comme le point S situé sur l'axe reste immobile, le plan P est tangent au cône de sommet S circonscrit à la sphère le long du cercle AC décrit par le point A dans la rotation.

Pour déterminer le sommet S de ce cône ou son cercle de contact avec la sphère, on remarque que les deux droites OS et OA respectivement perpen-

diculaires aux plans H et P font un angle égal à l'un des angles de ces deux plans (I, 226), leur angle est donc l'angle α ou son supplément. Par suite si dans un plan quelconque Q passant par la droite OB on mène par le centre O la droite AOA' faisant avec OB l'angle α et si on prend ses points d'intersection A et A avec la sphère les tangentes en A et A' au grand cercle de la sphère situé dans le plan Q rencontrent la droite OB aux points S et S' sommets des deux cônes circonscrits à la sphère auxquels sont tangents les plans cherchés.

On remarquera que les deux points S et S' sont symétriques par rapport au centre O de la sphère.

369. *Conséquence.* — Les plans tangents à une sphère, de pente donnée par rapport au plan horizontal sont tangents à l'un ou l'autre de deux cônes circonscrits à cette sphère dont les sommets sont sur la verticale du centre.

370. **Problème.** — *Par un point* (p, p') *mener à une sphère définie par son centre* (o, o') *et ses contours apparents les plans tangents qui font avec le plan horizontal un angle donné* α (*fig.* 163).

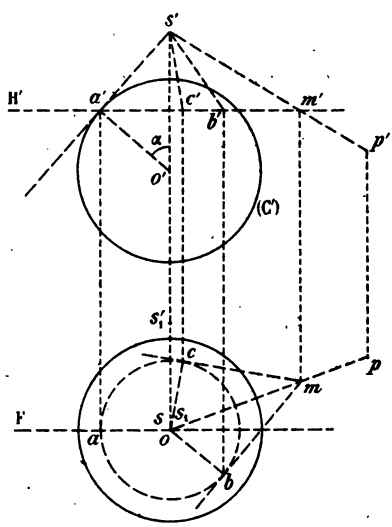


Fig. 163

Pour déterminer les sommets des cônes auxquels les plans cherchés sont tangents, procédons comme il vient d'être dit (368); considérons le plan de front F qui contient la verticale $(os, o's')$ du centre de la sphère; il coupe la sphère suivant un grand cercle projeté verticalement en vraie grandeur suivant le contour apparent (C'). On obtient un rayon de la sphère qui fait avec la verticale du centre l'angle donné α en menant dans le plan de front F la droite $(oa, o'a')$ dont la projection verticale $o'a'$ fait avec la droite $o's'$ l'angle α. Ce rayon rencontre la sphère au point (a, a') et la tangente au grand cercle de front de la sphère en ce point est projetée verticalement suivant la tangente $a's'$ au contour apparent en a', qui rencontre la verticale du centre au point (s, s'), sommet du cône circonscrit cherché.

Le cercle de contact du cône circonscrit de sommet (s, s') et de la sphère est le cercle horizontal de la sphère qui passe par le point (a, a'); il est situé dans le plan horizontal H' et se projette horizontalement en vraie grandeur suivant le cercle de centre o et de rayon oa.

On est alors ramené à chercher les plans passant par le point (p, p') et

tangents au cône qui vient d'être défini. Pour cela (226), on joint le sommet (s, s') du cône au point (p, p') et on cherche le point d'intersection (m, m') de la droite $(sm, s'm')$ avec le plan horizontal H' de la base du cône. Puis par le point (m, m') ainsi obtenu, on mène les tangentes à la base du cône en traçant les tangentes mb et mc à la projection horizontale de cette base qui passent par m; les points de contact b et c se rappellent verticalement en b' et c' dans le plan H'. Les génératrices de contact des plans tangents et du cône sont les droites $(sb, s'b')$ et $(sc, s'c')$.

On obtiendrait deux autres solutions avec le cône circonscrit à la sphère dont le sommet (s, s'_1) est le point symétrique du sommet (s, s') par rapport au centre (o, o').

§ II.

Cylindre circonscrit.

371. On a déjà rappelé (115, 7°) les propriétés géométriques du cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à une direction.

372. **Détermination des contours apparents. Théorème.** — 1° *Si le cercle de contact d'un cylindre circonscrit à une sphère rencontre en un point* M *le contour apparent de la sphère relatif à un plan* P, *ce point* M *appartient au contour apparent du cylindre relatif au même plan.*

2° *Les projections sur le plan* P *des deux contours apparents et du cercle de contact sont tangentes au point* m, *projection du point* M.

La démonstration est analogue à celle du théorème correspondant relatif au cône circonscrit (349) et nous ne la reprendrons pas. On en déduit aussi le théorème suivant :

373. **Théorème.** — *Les projections des contours apparents d'un cylindre circonscrit à une sphère s'obtiennent en menant aux contours apparents de la sphère les tangentes parallèles à la projection de même nom de la direction des génératrices.*

374. **Exemple I.** — Soit une sphère définie par son centre (o, o') et ses contours apparents (*fig.* 164). Le cylindre circonscrit à cette sphère parallèlement à la direction $(ab, a'b')$ a pour contour apparent vertical les deux génératrices projetées verticalement suivant les tan-

gentes $c'd'$ et $e'f'$ menées au contour apparent vertical parallèlement à la droite $a'b'$ (373).

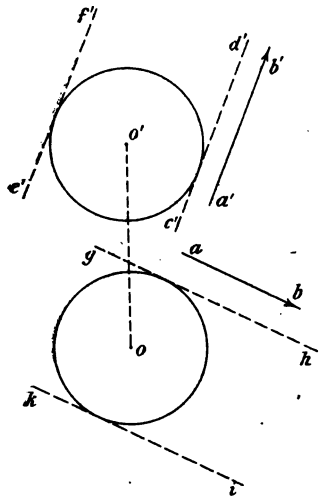


Fig. 164

De même, le contour apparent horizontal s'obtient en menant au contour apparent horizontal de la sphère les tangentes gh et ki parallèles à la droite ab (373).

375. Détermination du cercle de contact du cylindre et de la sphère. — Le plan P du cercle de contact du cylindre et de la sphère est le plan mené par le centre de la sphère perpendiculairement à la direction des génératrices du cylindre (115, 7°). On est donc ramené à construire une section plane de la sphère (155).

Nous nous bornerons à cette indication, sans effectuer la construction sur l'épure.

Remarque. — Dans le cas particulier où la direction donnée est verticale (ou de bout), le cercle de contact du cylindre circonscrit et de la sphère est le contour apparent horizontal (ou vertical) de la sphère (260), dont les projections sont bien connues (120).

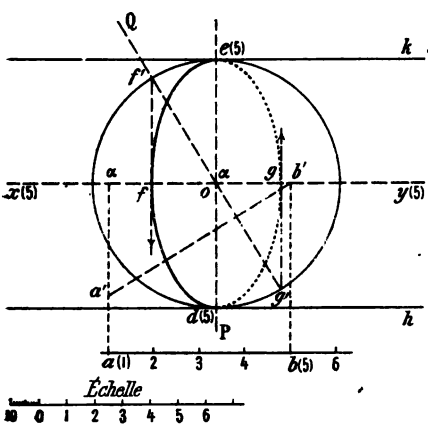


Fig. 165

376. Exemple II. (*Géométrie cotée*). — *Soit à déterminer la projection du cercle de contact d'une sphère de centre* o(5) *et de rayon donné avec le cylindre qui lui est circonscrit parallèlement à la direction* $a(1)b(5)$ (*fig.* 165).

Le contour apparent du cylindre s'obtient en menant au contour

apparent de la sphère les tangentes *dh* et *ek* parallèles à la droite *ab*, projection de la direction des génératrices (373).

377. *Projection du cercle de contact.* — Prenons un plan vertical de projection dont la trace horizontale *xy* est la parallèle menée par la projection *o* du centre de la sphère parallèlement à la projection *ab* des génératrices et en même temps prenons comme nouveau plan horizontal de projection le plan horizontal H′ de cote 5 qui passe par le centre *o*(5) de la sphère.

Le centre de la sphère se trouve ainsi sur la nouvelle ligne de terre *x*(5)*y*(5), ses projections sont confondues en *o* ; par suite le contour apparent vertical de la sphère dans ce système de projections est confondu avec le contour apparent horizontal.

La direction des génératrices *a*(1)*b*(5) a pour projection verticale la droite *a′b′* ; le point *b*(5) situé dans le plan horizontal H′ se projette en *b′* sur la ligne de terre *x*(5)*y*(5) et le point *a* est projeté en *a′* à une distance *aa′* de *xy* égale à sa cote relative au plan H′, soit quatre unités de l'échelle.

Le plan du cercle de contact est le plan mené par le centre perpendiculairement à la droite (*ab*, *a′b′*) ; ses traces *o*P et *o*Q sont respectivement perpendiculaires aux droites *ab* et *a′b′*.

Le cercle de contact est projeté verticalement suivant le segment *f′g′* de la trace verticale *o*Q qui est compris à l'intérieur du contour apparent vertical de la sphère (154).

En rappelant *f′* et *g′* en *f* et *g* sur la ligne de terre *xy*, on obtient les sommets *f* et *g* du petit axe de l'ellipse.

Le grand axe de l'ellipse est le segment *e*(5)*d*(5) qui est le diamètre horizontal du cercle de contact.

On peut alors tracer l'ellipse définie par ses axes. La ponctuation a été faite en supposant *transparente* la surface du cylindre et celle de la sphère *opaque*.

Remarque. — On aurait pu déterminer un point quelconque du cercle de contact et la tangente en ce point par la construction déjà indiquée (154, 4°).

EXERCICES

1. Mener à une sphère donnée les plans tangents de pente donnée passant par un point donné. (*Géométrie cotée.*)

2. Mener à une sphère les plans tangents parallèles à une direction donnée et faisant avec le plan vertical un angle donné.

3. On donne deux points A et B et une sphère O ; mener par le point B les plans tangents au cône de sommet A circonscrit à la sphère.

(*Saint-Cyr.*)

4. On donne une sphère et deux plans qui la coupent. Construire les plans tangents communs aux deux cônes circonscrits à la sphère et qui ont pour cercles de contact avec elle les sections de la sphère par les deux plans donnés.

(*Saint-Cyr.*)

5. Mener à une sphère un plan tangent par un point de façon que le point de contact de ce plan et de la sphère se trouve dans un plan donné. Considérer les cas :
1° où ce plan est vertical ou de bout ;
2° où ce plan passe par le centre de la sphère.

6. (*Géométrie cotée.*) On donne une sphère, un point, une droite. Mener par le point une droite tangente à la sphère et rencontrant la droite donnée.

7. Mener par un point donné une droite rencontrant une droite donnée et située à une distance donnée d'un point donné.

(*Saint-Cyr.*)

8. On donne une sphère O et deux droites D_1 et D_2 du plan horizontal. Trouver un point S tel que le cône circonscrit par S à la sphère O ait pour trace sur le plan horizontal une parabole tangente aux droites D_1 et D_2.

9. On donne un cercle du plan horizontal, construire une sphère passant par ce cercle et telle que le cône circonscrit à cette sphère le long du cercle : 1° soit tangent à une droite donnée D ; 2° ou bien contienne un point donné M.

(*Saint-Cyr.*)

10 Mener à deux sphères les plans tangents communs faisant un angle donné avec le plan horizontal.

11. Mener à deux sphères données les tangentes communes parallèles à une direction donnée.

(*Saint-Cyr.*)

12. Mener à une sphère des plans tangents faisant avec les plans de projection des angles donnés. (On peut résoudre de cette façon le problème déjà traité au n° 92.)

CHAPITRE XI

OMBRES DE LA SPHÈRE

---

§ I.

Ombre au flambeau.

378. Considérons une sphère O dont la surface est supposée *opaque* et un point *lumineux* S (*fig.* 166). Les rayons lumineux issus de S qui rencontrent la sphère en deux points distincts A et B sont situés à l'intérieur du cône (C) de sommet S circonscrit à la sphère. Le point A est le plus rapproché de la source S, il est par suite éclairé ; le point B qui est du côté opposé à la source est dans l'ombre propre de la sphère (I, 320). Les deux points d'intersection d'un rayon lumineux et de la sphère se confondent dans le cas où le rayon est une génératrice du cône (C), par suite *le contour de l'ombre propre d'une sphère éclairée par un point lumineux* S *est le cercle de contact de la sphère et du cône circonscrit de sommet* S. Ce cône s'appelle le *cône d'ombre* de la sphère relatif au point S. La calotte sphérique DEF est éclairée, la calotte DEG est dans l'ombre propre.

379. Dans les mêmes conditions, l'*ombre portée* par la sphère sur *un plan* P est la région de ce plan située à l'intérieur de la nappe du cône d'ombre qui s'étend au delà du cercle DE du côté opposé au sommet S. *Le contour* C' *de cette ombre portée est*, par suite, *en totalité ou en partie la section du cône d'ombre par le plan* P.

380. La détermination des contours de l'ombre propre d'une sphère et de l'ombre portée par elle sur un plan revient donc à des problèmes déjà traités (355 et 278).

381. Exemple I. — *Soit un point lumineux s(15,5) et une sphère de centre o(4, 5) et de rayon donné (fig. 167). Déterminer l'ombre propre de la sphère et l'ombre portée par elle sur le plan horizontal de projection.*

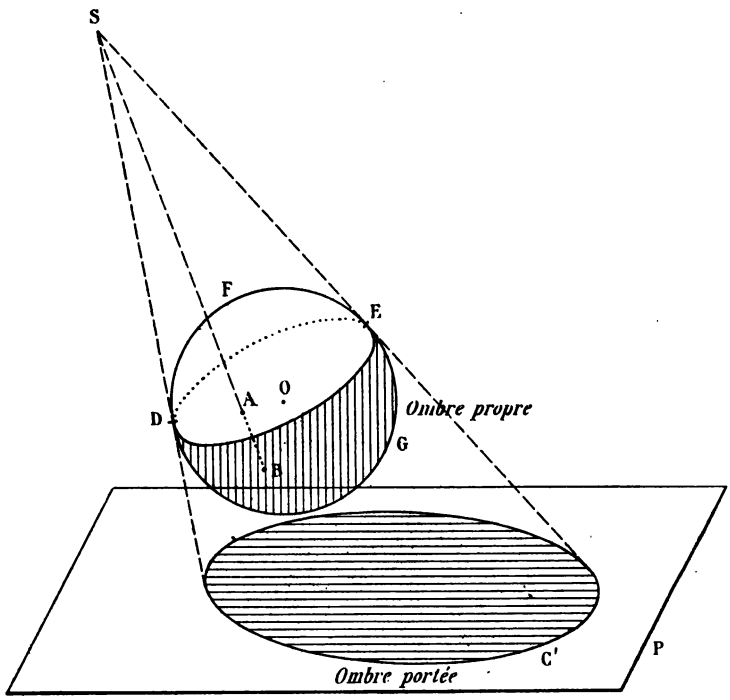


Fig. 166

1° Le *contour apparent du cône d'ombre* s'obtient (350) en menant par la projection *s* de la source lumineuse les tangentes *sa* et *sb* au contour apparent de la sphère.

2° *Ombre propre.* — Le contour de l'ombre propre est le cercle de contact de la sphère et du cône qui lui est circonscrit par le point *s*(15,5).

Pour déterminer ce cercle (355), faisons une projection sur le plan vertical de trace *so*, auquel le plan du cercle est perpendiculaire. Le point *s* se projette verticalement en *s'*, sur la perpendiculaire menée à la droite *so* par le point *s* et à une distance de *s* égale à 15,5 unités de l'échelle. On construit de même en *o'* la projection verticale du

centre o(4, 5) de la sphère et en traçant le cercle de centre o' et de

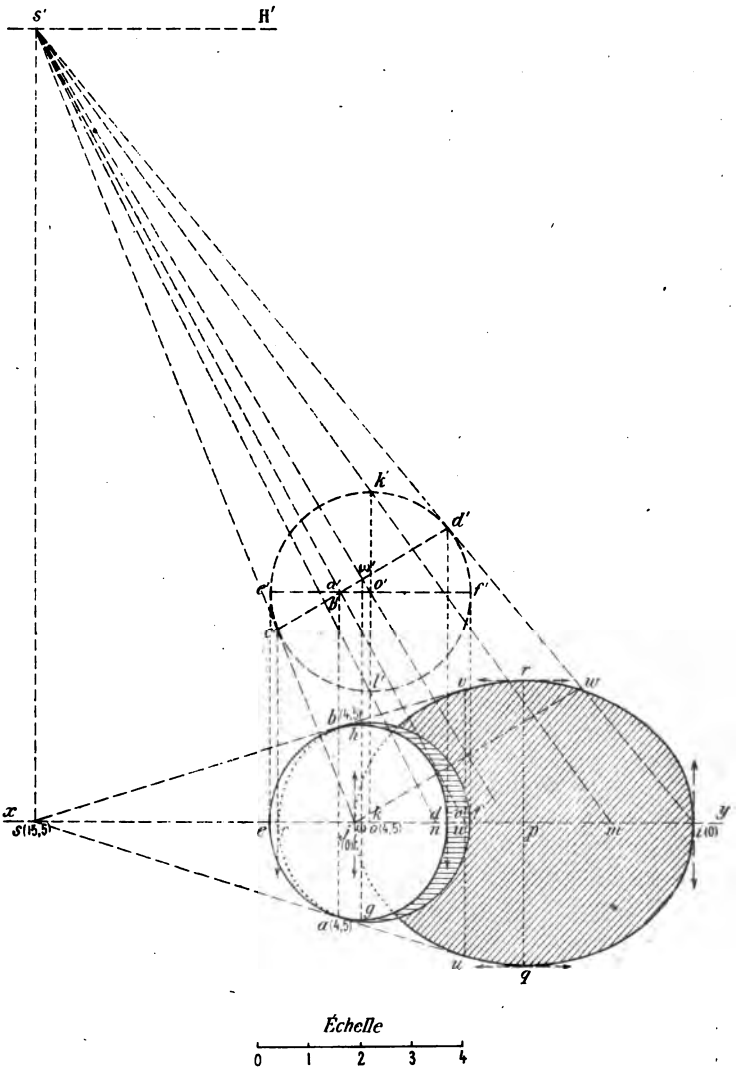


Fig. 167

même rayon que la sphère, on obtient le contour apparent vertical de la sphère.

Les tangentes $s'c'$, $s'd'$ menées à ce cercle par le point s' forment le contour apparent vertical du cône circonscrit.

Le plan du cercle de contact est de bout dans le système de projections considéré et sa trace verticale est la droite $c'd'$. On en déduit par une construction connue (154) les axes de la projection horizontale du cercle. Les points projetés verticalement en c' et d' sur le contour apparent vertical de la sphère se rappellent en c et d sur le segment ef projection horizontale de ce contour apparent ; c et d sont les sommets du petit axe de l'ellipse projection du cercle de contact.

Le centre de cette ellipse est le point ω milieu du segment cd. Le grand axe est par suite la perpendiculaire menée à la droite ef par le point ω ; on obtient ses deux sommets g et h en portant sur lui à partir de ω les longueurs ωg et ωh toutes deux égales au rayon du cercle, qu'on a en vraie grandeur sur la projection verticale en prenant la moitié du segment $c'd'$.

Il est alors facile de tracer l'ellipse en tenant compte de ce qu'elle passe aux points a et b et qu'elle y est tangente aux contours apparents de la sphère et du cône (118 et 349).

382. 3° *Ombre portée sur le plan horizontal.* — Le contour de cette ombre est la section par le plan horizontal du cône circonscrit à la sphère par le point s (15,5) (379).

Les axes et les foyers de la section plane d'un cône de révolution sont définis par le théorème de Dandelin (Grévy, *Compléments de Géométrie*, 679).

383. *Axe focal.* — L'axe focal est la projection de l'axe du cône sur le plan sécant. Cet axe est par suite dirigé suivant la droite so et les sommets sont les traces horizontales i et j des deux génératrices du cône (sd, $s'd'$), (sc, $s'c'$) situées dans le plan vertical qui a os pour trace horizontale.

384. *Foyers.* — Les foyers de la section sont les points de contact du plan sécant avec les sphères inscrites dans le cône et tangentes à ce plan. Ces sphères sont homothétiques de la sphère donnée (o, o') par rapport au centre d'homothétie (s, s') et les plans homologues du plan horizontal dans ces homothéties sont les plans horizontaux tangents à la sphère (o, o') ; leurs points de contact, qui sont les points homologues des deux foyers, ont pour projection verticale k' ou l'

et leurs projections horizontales coïncident avec le point *o*. En joignant ces points au centre d'homothétie (*s*, *s'*), on obtient deux droites projetées horizontalement suivant *sb*, verticalement suivant *s'k'* et *s'l'* et dont les traces horizontales *m* et *n* sont les foyers cherchés ; en effet le point *m* par exemple est l'homothétique du point (*k*, *k'*) dans l'une des homothéties considérées.

385. *Petit axe.* — On mène alors le petit axe de la section perpendiculaire à *ij* en son milieu *p*; on décrit de *m* comme centre une circonférence de rayon égal à *pi*, demi-grand axe de l'ellipse ; elle coupe le petit axe aux deux points *q* et *r*, qui sont les sommets du petit axe de la section, d'après une propriété bien connue (Grévy, *Compléments de Géométrie*, 623).

386. *Points sur le contour apparent horizontal du cône.* — Ce contour apparent se compose des deux génératrices projetées horizontalement suivant les droites *sa* et *sb*. Les deux points projetés en *a* et *b* sont sur le contour apparent horizontal de la sphère ; comme la droite *ab* est perpendiculaire à la ligne de terre *xy*, leurs projections verticales sont confondues en *a'* et *b'* sur *e'f'*, projection verticale du contour apparent horizontal de la sphère. Les deux génératrices de contour apparent horizontal du cône sont donc (*sa*, *s'a'*) et (*sb*, *s'b'*) dont on obtient facilement les traces horizontales aux points (*u*, *u'*) et (*v*, *v'*) ; ce sont les deux points cherchés.

Les tangentes à la trace horizontale du cône aux points *u* et *v* sont respectivement les droites *su* et *sv* (118).

Il est alors facile de tracer le contour de l'ombre *irvjuq*.

387. *Point quelconque et tangente en ce point.* — On obtient un point quelconque de la section en cherchant la trace horizontale d'une génératrice du cône d'ombre ; la tangente en ce point au contour de l'ombre est la trace horizontale du plan tangent au cône, qui est d'ailleurs aussi tangent à la sphère.

Nous nous bornerons à cette indication sans effectuer la construction correspondante sur l'épure.

388. *Ponctuation.* — L'épure a été ponctuée en supposant la sphère opaque. L'ombre propre a été couverte dans sa partie vue de hachures parallèles à la droite *so* et l'ombre portée de hachures obliques à cette droite.

389. Remarque. — Pour déterminer les foyers m et n de l'ombre propre, on peut se servir d'une propriété qui apparaît dans la démonstration du théorème de Dandelin (Grévy, *Compléments de Géométrie*, 680) : Si d'une extrémité j de l'axe focal, on abaisse la perpendiculaire jw sur l'axe $s'o'$ du cône et si w est le point où cette droite coupe la génératrice $s'i$, la longueur iw est égale à la distance des deux foyers de la section. Par suite, en portant sur la droite so, de part et d'autre du point p, centre de la section, une longueur égale à la moitié de la longueur iw, on obtient les deux foyers en m et n.

390. *Nature de l'ombre portée.*— La section plane d'un cône de révolution est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le plan parallèle au plan sécant, mené par le sommet, ne coupe pas le cône, le coupe ou lui est tangent (Grévy, *Compléments de Géométrie*, 679).

Dans le problème précédent (381), l'ombre portée sur le plan horizontal est une ellipse ; car le plan horizontal H' du sommet (s, s') ne coupe pas le cône, sa trace verticale H' étant à l'extérieur du contour apparent vertical du cône (*fig.* 167).

Dans le cas où le point lumineux (s, s') est sur la verticale du centre de la sphère (*fig.* 158), la section du cône d'ombre par le plan horizontal est un cercle de centre o et de rayon o' facile à déterminer.

391. **Exemple II.** — *On donne une sphère (o, o') tangente au plan horizontal. Trouver l'ombre portée par cette sphère sur le plan horizontal lorsqu'elle est éclairée par le point lumineux (s, s') de cote inférieure à son diamètre et situé dans le plan de front du centre* (*fig.* 168).

Contours apparents. — Les projections des contours apparents du cône circonscrit à la sphère par le point (s, s') s'obtiennent en menant par chaque projection du point les tangentes à la projection de même nom du contour apparent de même nom de la sphère (350). On construit ainsi les génératrices projetées horizontalement en sa et sb et celles projetées verticalement en $s'c'$ et $s'd'$.

392. *Ombre propre.* — Le cercle de contact du cône et de la sphère, qui limite l'ombre propre sur la sphère, est dans un plan P perpendiculaire à la droite $(so, s'o')$; comme cette droite est de front, le plan P est de bout et comme il contient les points projetés verticalement en c' et d', il a pour trace verticale la droite $c'd'$ (I, 130, 4°).

Le cercle de contact a donc pour projection verticale le segment

rectiligne $c'd'$; sa projection horizontale se détermine par la construction déjà vue (355). En rappelant horizontalement les points c' et

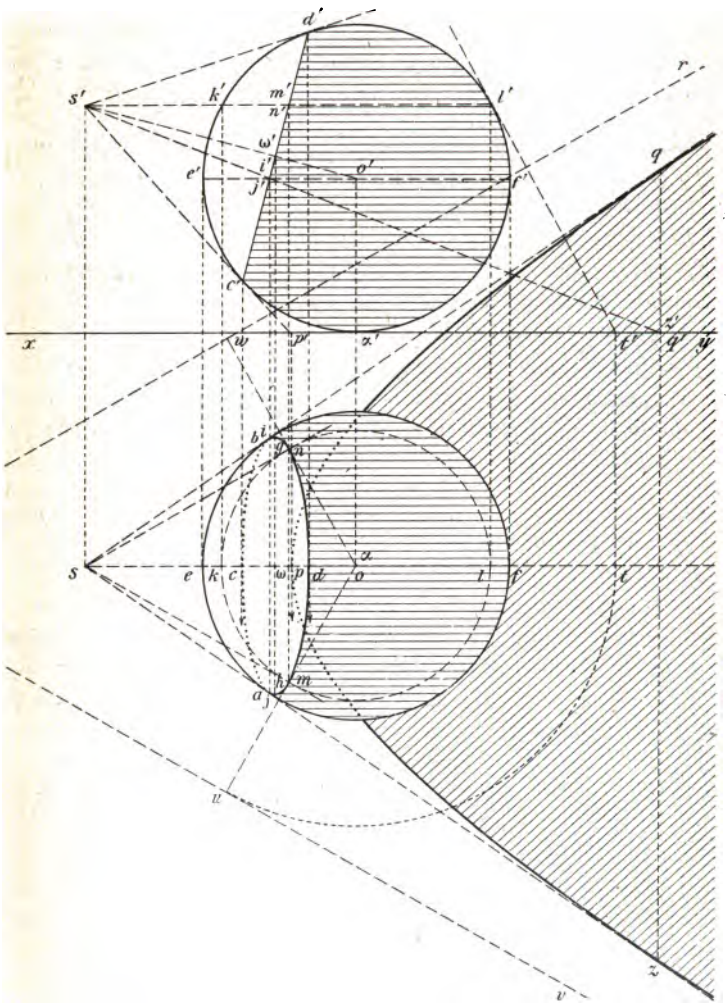


Fig. 168

d' en c et d sur la projection horizontale ef du contour apparent vertical de la sphère, on obtient les sommets du petit axe de l'ellipse projection. Le milieu ω du segment cd est le centre de l'ellipse dont

le grand axe est la perpendiculaire à cd menée par ce point ω et dont la longueur gh est celle du diamètre du cercle qu'on trouve en $c'd'$ sur la projection verticale.

Les points de l'ellipse situés sur le contour apparent horizontal sont les points de contact a et b des contours apparents horizontaux du cône et de la sphère (349).

393. *Ombre portée. — Directions infinies.* — Le plan horizontal H′ mené par le point (s, s') détermine sur la sphère le parallèle projeté verticalement suivant le segment rectiligne $k'l'$ et horizontalement en vraie grandeur suivant le cercle de centre o et de rayon ok. Les tangentes sm et sn menées à ce cercle par le point s sont les projections horizontales des tangentes horizontales menées à la sphère par le point (s, s') ou encore des génératrices horizontales $(sm, s'm')$ et $(sn, s'n')$ du cône circonscrit à la sphère par le point (s, s'). Par suite la section du cône par le plan horizontal de projection, qui est le contour de l'ombre portée est une hyperbole dont les directions infinies sont les droites $(sm, s'm')$ et $(sn, s'n')$ (319).

394. *Asymptotes.* — On détermine les asymptotes de l'hyperbole par le procédé déjà indiqué (319) à propos de la construction de la section plane du cône. L'asymptote est l'intersection du plan sécant et du plan tangent au cône le long de la génératrice parallèle au plan sécant. Prenons, par exemple, la génératrice $(sm, s'm')$. Le plan tangent au cône au point (m, m') est aussi tangent à la sphère, car le point (m, m') est un point du cercle de contact du cône et de la sphère. Ce plan est donc défini par la tangente $(ms, m's')$ au parallèle horizontal de la sphère qui passe par ce point et par la tangente en (m, m') au grand cercle de la sphère situé dans le plan vertical de trace horizontale om. Pour déterminer cette deuxième tangente, on fait subir à ce grand cercle une rotation autour de la verticale du centre (o, o') de la sphère, de manière à l'amener dans le plan de front du centre ; cette rotation amène le point (m, m') au point (l, l') où l'on mène la tangente $l't'$ au méridien de front de la sphère ; cette tangente $(lt, l't')$ est ramenée par la rotation inverse de la précédente en $(mu, m'u')$. On en déduit la trace horizontale du plan tangent au point (m, m') en menant par le point u, trace horizontale d'une droite du plan la parallèle uv à la direction sm de la projection des horizontales du plan. La droite uv est une asymptote de l'hyperbole.

La deuxième asymptote est la droite *wr* symétrique de la première *uv* par rapport à l'axe focal *so*.

395. *Sommets et foyers.* — L'axe focal de l'hyperbole est la projection *so* de l'axe du cône sur le plan horizontal. Un foyer de l'hyperbole est le point α confondu avec le point *o*, car la sphère (o, o') est inscrite dans le cône et tangente au plan horizontal au point (α, α').

Un sommet de l'hyperbole est le point *p* trace horizontale de la génératrice $(sp, s'p')$ du cône située dans le plan de front de trace horizontale *so*.

Les points de l'hyperbole situés sur le contour apparent horizontal s'obtiennent en cherchant les traces horizontales (q, q') et (z, z') des génératrices $(si, s'i')$ et $(sj, s'j')$ de contour apparent horizontal du cône.

L'ombre portée ne comprend que la branche d'hyperbole située sur la nappe du cône qui contient la sphère. C'est cette branche dont on a tracé un arc en *qpz*. On a ponctué l'épure en supposant la sphère et le plan horizontal opaques et le plan vertical transparent.

396. **Problème.** — *On donne une sphère* O *et un plan* P, *opaques tous deux. Trouver le lieu des points lumineux* S *qui font porter à la sphère* O *sur le plan* P *une ombre limitée par une parabole* (*fig.* 169).

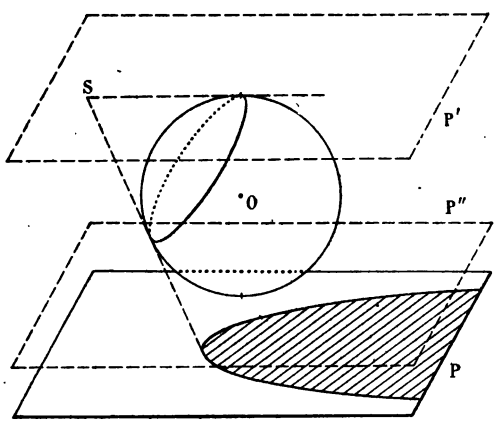


Fig. 169

Pour que la section par le plan P du cône circonscrit à la sphère par le point S soit une parabole, il faut et il suffit que le plan P′ mené parallèlement au plan P par le point S soit tangent au cône (390) ou, ce qui revient au même, soit tangent à la sphère. Le lieu du point S est donc formé par les plans P′ et P″ tangents à la sphère et parallèles au plan P.

Pour qu'il y ait ombre portée, il faut que la sphère se trouve entre le plan P et le plan parallèle mené par S. Par suite il peut arriver qu'un des deux plans P′ ou P″ ne réponde pas à la question, c'est le cas du plan P″ pour la disposition de la figure 169 où le plan P est supposé situé au-dessous de la sphère O.

§ II.

Ombre au soleil.

397. Considérons une sphère O dont la surface, supposée *opaque*, est éclairée par des rayons lumineux parallèles à la direction Δ

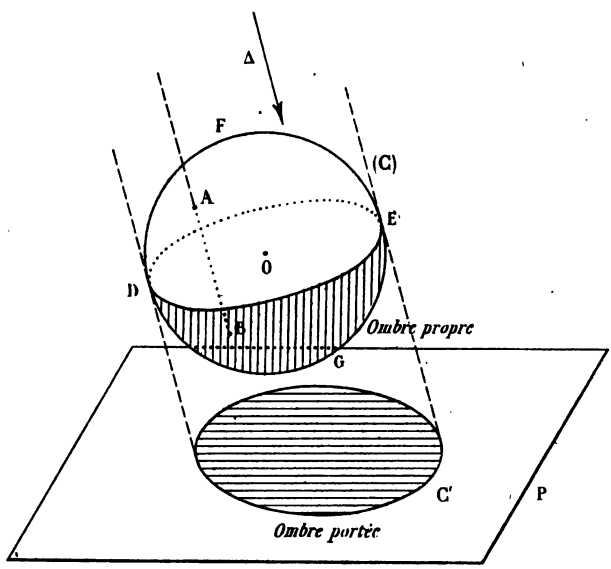


Fig. 170

(*fig.* 170). Les rayons lumineux tels que AB qui rencontrent la sphère en deux points distincts A et B sont situés à l'intérieur du cylindre (C) circonscrit à la sphère parallèlement à la direction Δ. Le point A, qui est du côté de la source lumineuse, est éclairé et le point B, qui est du côté opposé à la source, est dans l'ombre propre de la sphère (I, 320).

398. Les deux points d'intersection d'un rayon lumineux et de la sphère se confondent dans le cas où ce rayon est une génératrice du cylindre (C); par suite, le *contour de l'ombre propre d'une sphère éclairée par des rayons lumineux parallèles est le grand cercle de contact de la sphère et du cylindre circonscrit parallèlement à la direction des rayons lumineux.* Ce cylindre s'appelle le *cylindre d'ombre* de la sphère relatif à la direction Δ. L'hémisphère DEF est éclairé, l'hémisphère DGE est dans l'ombre propre.

399. Dans les mêmes conditions, l'*ombre portée* par la sphère sur un plan P est la région de ce plan située à l'intérieur du cylindre d'ombre et située par rapport à la sphère du côté opposé à la source. *Le contour* C′ *de l'ombre portée est* par suite *la section du cylindre d'ombre par le plan* P.

La détermination des contours de ces deux ombres sur la sphère et sur le plan P revient donc à des problèmes déjà traités (376 et 339).

400. Dans le cas où la direction des rayons lumineux est perpendiculaire au plan P (*fig.* 60), le contour de l'ombre propre est le contour apparent de la sphère par rapport au plan P (116) et le contour de l'ombre portée est la projection de contour apparent sur le plan P.

401. **Exemple I.** — *Soit une sphère de centre* o(6) *et de rayon donné éclairée par des rayons lumineux parallèles à la droite* $a(6)b(0)$ (*fig.* 171). *Déterminer l'ombre propre de la sphère et l'ombre portée par elle sur le plan horizontal de projection.*

1° *Le contour apparent du cylindre d'ombre* s'obtient (373) en menant au contour apparent de la sphère les tangentes *cd* et *ef* parallèles à la direction *ab* de la projection des rayons lumineux.

Les points projetés en *c* et *e* sur le contour apparent de la sphère ont même cote que le centre de la sphère, c'est-à-dire six unités. Les traces horizontales de ces génératrices s'obtiennent en $d(0)$ et $f(0)$, en prenant sur leurs projections les longueurs *cd* et *ef*, égales à la distance *ab* et de même sens qu'elle.

402. *Ombre propre.* — Le contour de l'ombre propre est le grand cercle de contact de la sphère et du cylindre circonscrit parallèlement à la droite $a(6)b(0)$ (398). Le plan de ce cercle est perpendiculaire à la direction $a(6)b(0)$; pour déterminer sa projection, faisons une

projection sur un plan vertical de trace xy parallèle à la droite ab; le plan du cercle de contact est de bout par rapport à ce plan vertical. Le centre de la sphère se projette verticalement en o', sur la perpendiculaire menée à la droite xy par le point o et à une distance

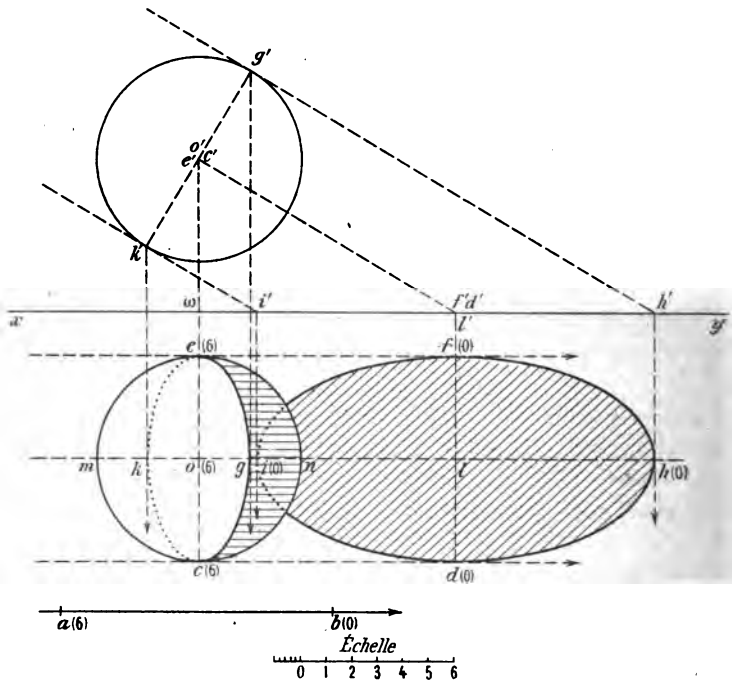


Fig. 171

$\omega o'$ de xy égale à six unités de l'échelle. En traçant la circonférence de centre o' et de même rayon que la sphère, on obtient le contour apparent vertical de la sphère.

On obtient de même en $c'd'$ la projection verticale de la génératrice $c(6)d(o)$; le point c' est confondu avec le point o' et le point d' est sur la ligne de terre xy. Les tangentes $g'k'$, $k'i'$ menées au contour apparent vertical de la sphère parallèlement à la droite $c'd'$ forment le contour apparent vertical du cylindre circonscrit.

Le plan du grand cercle de contact de ce cylindre et de la sphère est de bout dans le système de projections considéré et sa trace verticale est la droite $g'k'$, On en déduit par une construction déjà vue

(154) les axes de la projection horizontale du cercle. Les points projetés verticalement en g' et k' sur le contour apparent vertical de la sphère se rappellent en g et k sur le segment mn, projection horizontale de ce contour apparent ; g et k sont les sommets du petit axe de l'ellipse projection du grand cercle de contact. Le centre de cette ellipse est le point o, car le cercle de contact a pour centre le point (o, o'). Le grand axe de l'ellipse est la projection ce du diamètre horizontal $c(6)e(6)$ du cercle.

On peut alors tracer l'ellipse définie par ses deux axes.

403. 3° *Ombre portée sur le plan horizontal.* — Le contour de cette ombre est la section par le plan horizontal du cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à la direction $a(6)b(o)$ (399).

Les axes et les foyers de la section plane d'un cylindre de révolution sont définis par le théorème de Dandelin (Grévy, *Compléments de Géométrie*, 677).

404. *Axe focal.* — L'axe focal est la projection de l'axe du cylindre sur le plan sécant. Cet axe est par suite dirigé suivant la droite ol, projection horizontale de l'axe $(ol, o'l')$ du cylindre, et ses sommets sont les traces horizontales h et i des deux génératrices du cylindre $(gh, g'h')$ et $(ki, k'i')$ situées dans le plan vertical qui a pour trace horizontale ol.

405. *Petit axe.* — Le centre de la section est le point l, trace horizontale de l'axe $(ol, o'l')$ du cylindre, et le petit axe qui, d'après le théorème de Dandelin, est égal au diamètre du cylindre est le segment df.

On peut alors tracer l'ellipse définie par ses deux axes gh et df.

406. *Point quelconque et tangente en ce point.* — On obtient un point quelconque de l'ombre portée en cherchant la trace horizontale d'une génératrice du cylindre d'ombre ; la tangente en ce point au contour de l'ombre est la trace horizontale du plan tangent au cylindre, plan qui est d'ailleurs aussi tangent à la sphère.

Nous nous bornerons à cette indication sans effectuer la construction correspondante sur l'épure.

407. *Ponctuation.* — L'épure a été ponctuée en supposant la

sphère opaque. L'ombre propre a été couverte dans sa partie vue de hachures parallèles à la droite *ab* et l'ombre portée de hachures obliques à cette droite.

408. Si l'on cherche *l'ombre portée sur deux plans concourants* P *et* Q, il faut tenir compte des remarques générales déjà faites (I, 313 et suivants).

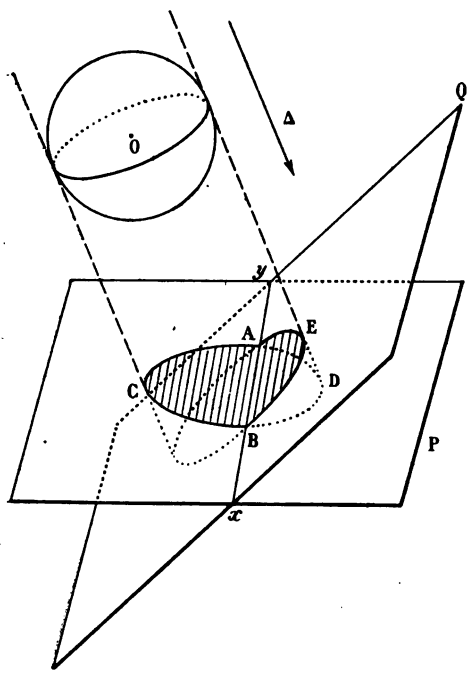


Fig. 172

Par exemple, dans le cas où les rayons lumineux sont parallèles à la direction Δ (*fig.* 172), si l'ombre portée par la sphère O sur le plan P est une ellipse ABCD qui coupe en A et B l'intersection *xy* des deux plans, seul le segment d'ellipse ACB constituera l'ombre portée sur P. Sur Q, on trouvera une ombre portée limitée par l'arc d'ellipse AEB, section du cylindre d'ombre par le plan Q.

409. On a donc d'abord à déterminer les sections du cylindre d'ombre par les deux plans P et Q. Puis on construit les points A et B où le contour de l'ombre portée passe d'un plan sur l'autre en cherchant les points communs au cylindre et à la droite d'intersection *xy* des plans P et Q.

Nous nous bornerons à ces indications.

EXERCICES

1. Trouver l'ombre portée par une droite sur une sphère.

2. Trouver l'ombre portée par une sphère sur une droite.

3. Trouver l'ombre portée sur le plan horizontal par un hémisphère limité par le plan horizontal du centre de la sphère.

4. On donne une sphère située au-dessus du plan horizontal. Déterminer un point lumineux (s, s') pour que l'ombre portée par la sphère sur le plan horizontal soit une parabole tangente à deux droites données du plan horizontal.

5. On donne un cylindre droit à base circulaire dont une base est dans le plan horizontal ; ce cylindre est surmonté d'un hémisphère qui a pour grand cercle de base la base supérieure du cylindre. Construire : 1° l'ombre propre du solide formé par le cylindre et l'hémisphère ; 2° l'ombre portée sur le plan horizontal.

6. Ombre au flambeau sur le plan vertical d'une calotte sphérique limitée par un cercle horizontal. Le point lumineux est au centre de la sphère.

CHAPITRE XII

SURFACES TOPOGRAPHIQUES

§ 1.

Représentation d'une surface par des courbes de niveau.

410. On appelle *surface topographique* toute surface, telle que celle d'un terrain, qui n'est pas susceptible d'une définition géométrique. Pour représenter ces surfaces sur une épure, on emploie les méthodes de la géométrie cotée; mais, quel que soit le nombre de points de la surface définis sur l'épure par leurs projections cotées, il est bien évident que celle-ci ne peut jamais représenter complètement et exactement le terrain. Aussi ne cherche-t-on qu'une *représentation approchée* de ces surfaces par le procédé suivant, dit des courbes de niveau.

411. Courbes de niveau. — Considérons des plans horizontaux équidistants, dont les cotes forment par suite une progression arithmétique. Les sections de la surface par ces plans sont dites *courbes horizontales* ou *de niveau* de cette surface, car les points d'une même courbe ont la même cote, c'est-à-dire sont au même niveau. Ce sont les projections de ces courbes que l'on trace sur l'épure; elles représentent et définissent la

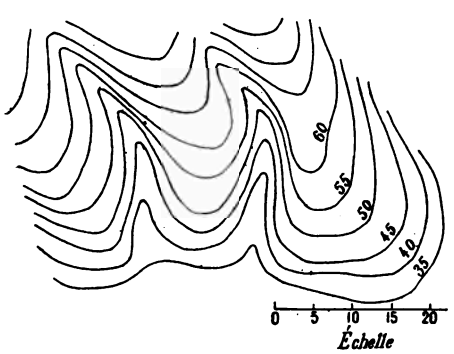


Fig. 173

surface avec d'autant plus d'exactitude que les cotes de leurs plans sont plus rapprochées ; près de chacune de ces courbes, on écrit la cote commune à tous ses points (*fig.* 173) ; mais on peut se borner à n'en inscrire que quelques-unes dont la connaissance suffit à déterminer facilement les autres, si l'on tient compte que leur suite forme une progression arithmétique.

412. Équidistance réelle, équidistance graphique. — La distance verticale entre les plans horizontaux de deux courbes de niveau consécutives s'appelle l'*équidistance réelle.*

En général, l'équidistance réelle croît quand l'échelle numérique (I, 14) diminue, de manière à éviter de tracer sur l'épure des courbes de niveau trop rapprochées et de compliquer la représentation de la surface.

On appelle *équidistance graphique* l'équidistance réelle réduite à l'échelle du dessin.

Si l'échelle numérique est la fraction $\frac{1}{n}$, l'équidistance réelle étant E, l'équidistance graphique est $e = \frac{E}{n}$.

Ainsi, dans la carte de l'État-Major français qui est construite à l'échelle de $\frac{1}{80000}$, l'équidistance réelle est 20 mètres et l'équidistance graphique est par suite $\frac{20}{80000} = \frac{1}{4}$ de millimètre.

413. Courbes maîtresses, courbes intercalaires. — Dans le but de rendre la carte plus facile à lire, on trace souvent d'une façon particulière certaines courbes régulièrement espacées. Tantôt, comme dans la cartographie suisse, on les distingue par un trait pointillé dont l'effet à quelque distance doit être le même que celui du trait plein des autres courbes ; tantôt on renforce ce trait. Ces

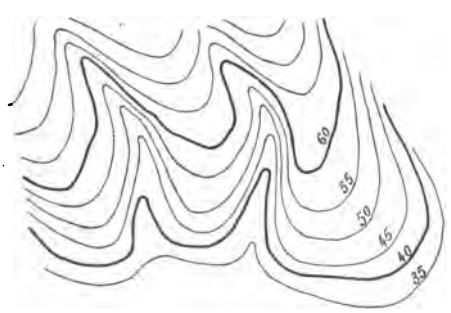


Fig. 174

courbes, qui dans l'un et l'autre cas sont dites *courbes maîtresses*, prennent souvent dans le second le nom de *courbes grosses*. Ainsi, dans la figure 174, les courbes de niveau de cotes 40 et 60 sont des courbes *maîtresses*.

Il peut arriver que dans des terrains peu accidentés les formes ne soient pas suffisamment définies par les courbes tracées à l'équidistance adoptée ; pour définir avec plus de précision la partie de la surface comprise entre deux courbes de niveau consécutives, on intercale entre elles des courbes de niveau auxiliaires que l'on nomme *courbes intercalaires*. On les trace généralement en pointillé. Leur équidistance est un sous-multiple simple $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$ de l'équidistance réelle.

§ II.

Problèmes relatifs aux courbes de niveau.

414. Problème I. — *Soit à déterminer la cote d'un point d'une surface topographique* S *définie par des courbes de niveau, connaissant la projection horizontale m de ce point (fig. 175).*

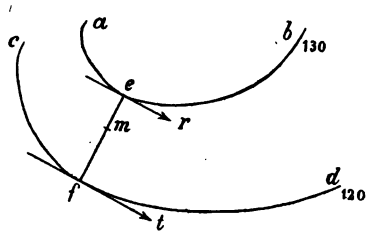


Fig. 175

Supposons le point m placé entre les courbes de niveau consécutives ab et cd de cotes 120^m et 130^m.

Comme la partie de la surface comprise entre les deux courbes de niveau n'est pas exactement définie sur l'épure, on ne peut obtenir pour le point projeté en m qu'une cote *approchée*.

Pour cela, on trace par le point m un segment de droite ef *à peu près* normal aux deux courbes de niveau, c'est-à-dire à peu près perpendiculaire aux tangentes er et ft à ces deux courbes aux points e et f; on *suppose* alors que la courbe de la surface projetée suivant le segment emf est la droite e (130) f (120) et on détermine la cote du point de cette droite projeté en m, par l'un des procédés indiqués dans l'étude de la ligne droite.

Par exemple, en appliquant la méthode numérique (I, 18, 2°), on trouve pour la distance du point considéré au plan horizontal de cote 120 l'expression $10^m \times \frac{mf}{ef}$, qu'on calcule après avoir mesuré sur l'épure les longueurs *me* et *mf*. On peut aussi évaluer *à vue d'œil* le rapport $\frac{mf}{ef}$; s'il paraît sensiblement égal à $\frac{3}{5}$, la cote de *m* est approximativement égale (I, 18, Rem. I) à $120^m + 10^m \times \frac{3}{5} = 126^m$.

415. Remarque I. — L'introduction dans la solution précédente du segment rectiligne *e*(130)*f*(120), sur lequel la variation de la cote du point projeté en *m* est proportionnelle à la distance *me*, est un moyen d'approximation en tout point analogue au calcul des parties proportionnelles dans la recherche du logarithme d'un nombre compris entre deux nombres consécutifs de la table.

416. Remarque II. — L'erreur commise dans cette détermination approchée de la cote dépend de la forme de la surface entre les deux courbes de niveau considérées. Elle est d'autant plus faible que la surface est mieux représentée, c'est-à-dire que les plans des courbes de niveau sont plus rapprochés.

417. Problème II. — *Section d'une surface topographique par un plan.*

Soit à trouver la courbe d'intersection d'une surface topographique définie par des courbes de niveau avec un plan P défini par son échelle de pente (*fig.* 176).

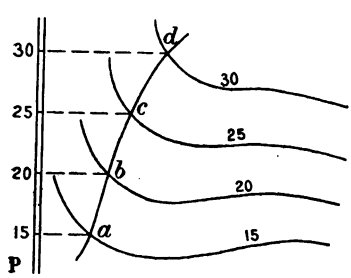


Fig. 176

On cherche les points communs aux courbes de niveau qui définissent la surface et aux horizontales du plan P qui ont la même cote ; on obtient ainsi les points *a*(15), *b*(20), *c*(25), *d*(30) qui définissent *approximativement* la section, dont on obtient la projection approchée *abcd* en joignant d'un trait continu les projections de ces points.

418. Cas particulier. — *Le plan sécant est vertical.*

On définit alors ce plan par sa trace horizontale xy (*fig.* 177).

La section est déterminée par les points de rencontre $a(65)$, $b(70)$, $c(75)$, $d(75)$, $e(70)$, ... des courbes de niveau et du plan vertical.

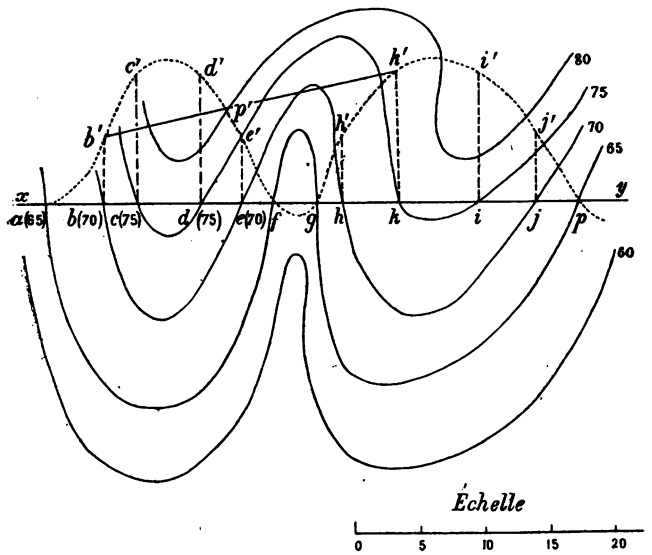


Fig. 177

Pour se rendre compte de la forme de cette courbe, il est commode de rabattre le plan vertical xy sur un plan horizontal, celui de cote 65 par exemple. Les points qui définissent la section se rabattent en a', b', c', d', e', ... sur les perpendiculaires menées à xy par leur projection et à une distance de xy égale à 5 ou 10 unités de l'échelle suivant qu'ils sont à la cote 70 ou 75 (I, 184). (On suppose que les cotes sont mesurées avec la même unité que les longueurs projetées sur l'épure.) En joignant ces rabattements par un trait continu, on obtient le rabattement approximatif de la section, qu'on appelle quelquefois *profil* de la surface ou du terrain dans la direction xy.

419. Conséquence. — Ce rabattement montre que si la surface est opaque (c'est le cas d'un terrain), un observateur placé au point $b(70)$ ne peut voir le point $k(75)$, car la droite $b'k'$ qui joint les

rabattements de ces deux points rencontre le profil de la surface au point p' situé entre b' et k' ; du point $k(75)$ on voit le point de la surface rabattu en p' et le point $b(70)$ est caché par l'élévation du terrain rabattue en $e'd'c'b'$.

420. Problème III. — *Intersection d'une droite et d'une surface topographique.*

Pour obtenir les points où une droite $p(15)q(30)$ donnée par sa projection cotée rencontre une surface topographique définie par ses courbes de niveau (*fig.* 178), on fait passer par la droite un plan auxiliaire. On détermine ce plan en se donnant arbitrairement la direction qa de ses horizontales ; on cherche la courbe d'intersection $a(30)b(25)c(20)d(15)$ de ce plan et de la surface (417) ; le point m où la droite pq rencontre la courbe $abcd$ est la projection approximative d'un des points cherchés. On détermine la cote de ce point, sensiblement 22,4, en tenant compte de ce qu'il est sur la droite $p(15)q(30)$.

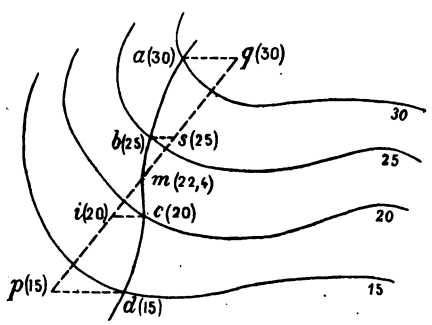


Fig. 178

421. Problème IV. — *Pente d'une ligne tracée sur une surface topographique.*

Soit amb la projection d'une ligne qui est sur la surface topographique à laquelle appartiennent les deux courbes de niveau C_1 et C_2 de cotes 20 et 30 (*fig.* 179). Si l'arc amb ne s'écarte pas sensiblement de la corde ab, on appelle *pente moyenne* de cette ligne entre les deux points $a(20)$ et $b(30)$ la pente de la droite définie par les deux points $a(20)$ et $b(30)$. Si on mesure la distance ab à l'échelle du dessin et si on suppose les cotes mesurées avec la même unité que

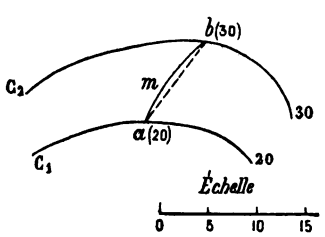


Fig. 179

les longueurs de l'épure, cette pente est la valeur du rapport $\frac{10}{ab}$ (I, 21) ou encore $\frac{e}{ab}$, en désignant par la lettre e l'équidistance graphique ; ce dernier rapport s'obtient en multipliant les deux termes du premier par l'échelle numérique (412).

422. Lignes d'égale pente. — Définition. — On appelle *ligne d'égale pente* d'une surface une ligne tracée sur cette surface et dont la pente moyenne reste constante entre les lignes de niveau consécutives qu'elle rencontre.

423. Problème V. — *Soit à mener par le point a(20), pris sur une surface représentée par ses courbes de niveau, une ligne de pente constante et égale à* $\frac{3}{5}$ (*fig.* 180).

Ce problème est analogue à celui qui a été déjà traité pour le plan (I, 45) : *Mener dans un plan, par un point pris dans ce plan, une droite de pente donnée.* La solution qu'on va donner est la même que celle indiquée dans le cas du plan ; mais alors qu'une droite est définie par *deux* points, la ligne cherchée sera définie par ses points d'intersection avec les différentes courbes de niveau de la surface.

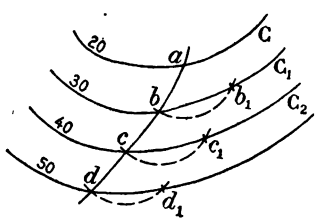


Fig. 180

Désignons par b le point où la ligne cherchée rencontre la courbe de niveau C_1 consécutive à la courbe C qui passe par le point donné $a(20)$. La pente moyenne de la ligne cherchée entre les deux courbes C et C_1 a pour valeur (421) $\frac{e}{ab} = \frac{3}{5}$ d'où l'on déduit

$$ab = \frac{5e}{3}.$$

Par suite, si du point a comme centre avec un rayon égal à $\frac{5e}{3}$, on décrit une circonférence, elle rencontre la courbe C_1 aux points b et b_1 qui appartiennent aux lignes cherchées, car les droites $a(20)b(30)$ et $a(20)b_1(30)$ ont la pente demandée $\frac{3}{5}$.

De la même manière, si avec le rayon $\frac{5e}{3}$ on décrit une circonférence de centre b, elle rencontre la courbe de niveau C_2 aux points c et c_1, projections des points de rencontre de C_2 et des lignes cherchées. On continuera la construction de la même manière et on définit de proche en proche les projections des points où les lignes cherchées rencontrent les courbes de niveau consécutives.

424. On voit qu'en chaque point passent deux lignes répondant à la question. Ainsi du point $a(20)$ partent les deux lignes $a(20)b(30)$ et $a(20)b_1(30)$. En joignant d'un trait continu les projections des points obtenus et situés sur des courbes de niveau dont les cotes vont constamment en croissant, on obtient en $abcd$ la projection d'une des lignes cherchées.

425. Lignes de plus grande pente. — La ligne tracée sur une surface dont la projection ab passe par un point a (*fig.* 179) a pour pente la valeur de la fraction $\frac{e}{ab}$ (421). Comme le numérateur e de ce rapport est constant, la pente est la plus grande possible lorsque ab prend la plus petite valeur possible ; par suite on obtient la *ligne de plus grande pente* de la surface qui passe au point $a(10)$ en prenant pour sa projection ab (*fig.* 181) la ligne la plus courte menée par a entre les deux courbes de niveau consécutives ; cette ligne est orthogonale aux deux courbes de niveau aux points où elle les rencontre.

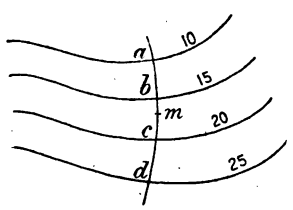


Fig. 181

On détermine de cette façon la projection de la ligne de plus grande pente qui passe en un point quelconque de la surface défini par sa projection m, et on prolonge cette ligne de proche en proche de la même manière.

426. Remarque. — Sur un terrain uni, la direction des lignes de plus grande pente est celle dans laquelle les eaux de pluie s'écoulent.

427. Pente d'une surface en un point. — On appelle *pente d'une*

surface en un point M (*fig.* 181), la pente de la ligne de plus grande pente ABCD passant par ce point.

La longueur *bc* de la portion de ligne de plus grande pente passant par le point *m* et comprise entre les deux courbes de niveau voisines s'appelle l'*écartement* des courbes en ce point. Désignons par *l* la mesure, à l'échelle du dessin, de l'écartement *bc*.

La pente de la surface au point M s'exprime simplement en fonction de l'équidistance graphique et de l'écartement *l* des courbes en ce point. En effet, la formule établie au n° 421 donne, en désignant par P la pente de la ligne de plus grande pente ABCD :

$$P = \frac{e}{bc},$$

c'est-à-dire

$$P = \frac{e}{l}.$$

Or, sur une même épure, l'équidistance graphique *e* est constante ; la formule précédente montre alors que P et *l* sont inversement proportionnelles ; par suite les courbes de niveau sont d'autant plus rapprochées que la pente de la surface est plus forte.

428. Application des considérations précédentes aux cartes topographiques. — Les *plans* ou *cartes topographiques* sont des dessins qui représentent un terrain et les détails de sa surface. En général, cette représentation est obtenue en projetant le terrain sur un plan horizontal et en figurant les courbes de niveau de sa surface (411). On peut alors résoudre sur la carte, qui n'est en somme qu'une projection cotée du terrain, les problèmes traités dans les numéros précédents.

429. Impression du relief donnée par les courbes de niveau. — Considérons un dessin représentant un terrain à l'aide de courbes de niveau dont l'équidistance est 5^m (*fig.* 182) ; les plans horizontaux qui les déterminent ont pour cotes 35^m, 40^m, 45^m, ... Supposons que les cotes aillent en croissant à mesure que les courbes s'éloignent de nous sur le dessin, on en conclut que le terrain va en montant à mesure que les courbes s'éloignent.

Considérons maintenant une sinuosité *acb* de ces courbes qui nous présente sa concavité ; prenons deux points *a* et *b* sur la courbe 60 de part et d'autre de la sinuosité. La droite qui joint sur le terrain

les deux points $a(60)$, $b(60)$ est une droite horizontale. Or, sa projection ab coupe les courbes 55 et 50 ; donc, les points de la surface du terrain dont les projections sont sur le segment ab sont situés au-dessous de AB, et la sinuosité considérée correspond pour le terrain à une dépression. Par suite, lorsque l'observateur place devant lui un dessin représentant un terrain qui va en montant, toute concavité des courbes tournée vers l'observateur correspond à une dépression et toute convexité à une saillie.

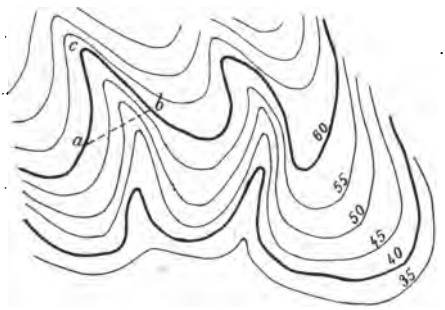


Fig. 182

Si l'on veut se rendre un compte plus exact de la forme d'un terrain, on en cherchera le profil dans différentes directions par la construction indiquée au n° 418. Mais il n'est pas toujours nécessaire de construire le rabattement $ab'c'd'e'fgh'k'i'j'p$ du profil (*fig.* 177) : en se déplaçant sur xy, de la gauche vers la droite, le sens de la variation de la cote des points qu'on rencontre $a(65)b(70)c(75)\ldots$ indique suffisamment en général les mouvements de la surface du sol.

430. Échelle numérique. — On appelle *échelle numérique* d'une carte ou d'un plan le rapport qui existe entre la longueur d'une ligne sur la carte ou le plan et la longueur de la projection horizontale de la ligne correspondante du terrain.

Dire qu'un plan ou une carte est à l'échelle de 1/50000, c'est dire que chaque longueur de 1 mètre mesurée sur le dessin représente 50 kilomètres de la projection, ou encore qu'un centimètre du dessin correspond à 500 mètres de la projection du terrain.

431. Échelle graphique ou métrique. — Si l'expression de l'échelle numérique n'est pas très simple, elle nécessite, dans les applications, des calculs que l'on fait généralement de tête et qui peuvent entraîner des erreurs. Pour les éviter, on a recours à ce qu'on nomme une *échelle graphique* ou *métrique*.

Une échelle graphique est une ligne droite tracée généralement

en dessous du plan, et divisée en segments représentant, à l'échelle, des multiples entiers de l'unité de longueur. Ainsi, dans la carte de l'État-Major français, qui est à l'échelle de 1/80000, le kilomètre doit

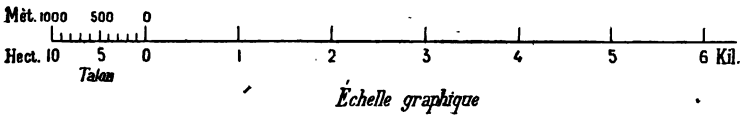


Fig. 183

être représenté par 1/80 de 1^m, soit $12^{mm},5$. On prend alors une droite de 25 centimètres (*fig.* 183) et on la divise en 20 parties égales de $12^{mm},5$ chacune, que l'on numérote de gauche à droite : 0, 1, 2, 3, .., 20 kilomètres. Pour qu'on puisse mesurer les longueurs inférieures au kilomètre, on prolonge l'échelle graphique d'une division vers la gauche et on partage cette division en 10 parties égales, numérotées cette fois, de droite à gauche, de 0 à 10 ; chacune des subdivisions a pour longueur $1^{mm},25$ et représente 100 mètres de la projection du terrain. Cette partie de l'échelle est le *talon*.

Pour mesurer une distance à l'aide de l'échelle graphique, on place une bande de papier rectiligne sur la carte, de façon que son bord passe par les points dont on veut connaître la distance et on marque ces points sur la bande avec un crayon ; ou bien encore on place à chacune des extrémités de la longueur à mesurer les pointes d'un compas convenablement ouvert. On porte ensuite sur l'échelle la longueur obtenue, de façon que l'une de ses extrémités tombe exactement sur l'une des divisions de l'échelle et l'autre dans le talon.

Si la première extrémité se trouve par exemple sur la division 8 de l'échelle, et l'autre extrémité entre les divisions 4 et 5 du talon,

Échelles Métriques $\left(\frac{1}{80000}\right)$.

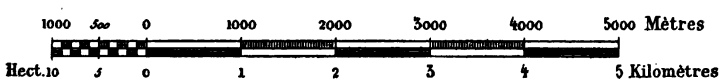


Fig. 184

la longueur cherchée est comprise entre 8 kilomètres 400 mètres et 8 kilomètres 500 mètres ; on achève la mesure en appréciant à vue la fraction d'hectomètre qui reste.

432. La figure 184 est la reproduction d'une partie de l'échelle

métrique qui figure sur les cartes de France au 80000e, publiées par le Service géographique de l'Armée Elle comporte une double graduation, celle du haut en mètres, celle du bas en kilomètres. L'échelle se trouve en entier au bas de la Planche II, à la fin du volume.

§ III.

Planimétrie. — Nivellement.

433. Les opérations à l'aide desquelles on construit les cartes topographiques sont de deux sortes, celles de la *planimétrie* et celles du *nivellement*.

434. **Planimétrie.** — La planimétrie a pour but de construire sur le papier des figures semblables aux projections sur un plan horizontal de celles que forment, à la surface du sol, les constructions, les voies de communication (routes, chemins de fer, canaux, etc.), les lignes de séparation des cultures, les bords des cours d'eau, des lacs, les rivages de la mer, etc. Dans la plupart des cartes, on relève également les limites administratives, bien qu'elles ne soient pas des lignes réelles.

435. Nous allons indiquer *sommairement* les principaux procédés employés dans les opérations de la planimétrie, pour déterminer sur la carte les points qui représentent les différents points d'un terrain. On commence toujours par substituer aux figures compliquées formées à la surface du sol par les objets à représenter des figures polygonales s'adaptant le mieux possible aux premières. Il faut ensuite mesurer les côtés et les angles des projections horizontales de ces polygones. Les instruments de mesure les plus simples sont : pour les longueurs, la *chaîne d'arpenteur*, pour les angles, le *graphomètre*. Comme il s'agit de représenter les projections horizontales des figures sur le terrain, il faut avoir soin, dans la mesure des longueurs de maintenir constamment la chaîne horizontale. En ce qui concerne les angles, le graphomètre peut donner directement la mesure de leurs projections horizontales

436. 1° Procédé par intersection. — On commence par mesurer très exactement sur le terrain la projection horizontale d'une droite dite *base*, limitée à deux points A et B, nettement définis (*fig.* 185). Cela fait, en transportant successivement le graphomètre aux extrémités de cette base, on mesure *les projections horizontales* des angles que font avec AB les rayons visuels dirigés des points A et B vers les points C, D, ..., qu'il s'agit de lever.

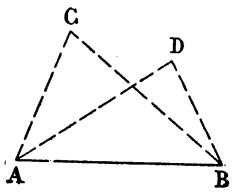


Fig. 185

Il ne reste plus ensuite qu'à reporter sur le dessin qu'on effectue la mesure, réduite à l'échelle choisie, de la projection de la base AB et les différents angles mesurés, pour obtenir une figure semblable à la projection horizontale de celle du terrain. Un point tel que C est ainsi déterminé par l'*intersection* des deux droites AC et BC; de là le nom donné au procédé.

437. 2° Procédé par cheminement. — Dans ce procédé, on suppose les points à lever reliés par une ligne polygonale ABC... (*fig.* 186) et on mesure les projections horizontales des côtés de cette ligne, ainsi que les projections de chacun de ses angles; on reporte ensuite ces mesures sur le dessin.

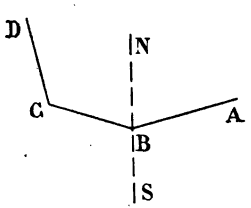


Fig. 186

Pratiquement, on détermine le plus souvent, non les angles ABC, BCD,... mais ceux formés par chacun des côtés du polygone avec une direction fixe NS, généralement la direction Nord-Sud. Pour mesurer les côtés de la ligne ABCD, on est obligé de la parcourir en entier, de là le nom de cheminement donné au procédé.

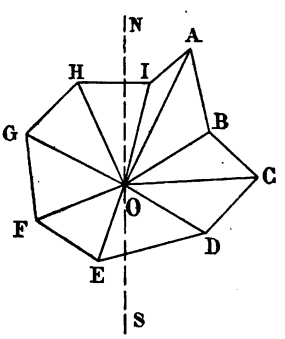


Fig. 187

438. 3° Procédé par rayonnement. — Dans ce procédé, on détermine la position d'une série de points A,

B, C, D,.... (*fig.* 187) répartis autour d'un point O, en mesurant les projections horizontales des rayons OA, OB, OC,..., ainsi que les projections horizontales des angles que font ces rayons entre eux, ou mieux encore les projections des angles qu'ils font avec une direction fixe NS, généralement la direction Nord-Sud.

439. **Nivellement.** — Les opérations du nivellement ont pour but de définir le *relief* du sol, c'est-à-dire les différentes formes de sa surface. Elles consistent principalement dans la détermination des *courbes de niveau* et dans la mesure des hauteurs d'un certain nombre de points de la surface du sol, au-dessus d'un plan horizontal de comparaison si la carte a une petite étendue, ou d'une surface qui prolonge le niveau moyen des mers si le terrain à représenter a une grande étendue. Ces hauteurs ont reçu le nom de *cotes* d'altitude.

En France, les cotes sont exprimées en mètres au-dessus d'un repère tracé à Marseille, à la hauteur du niveau moyen de la mer.

Le problème *élémentaire* du nivellement consiste à mesurer la différence des cotes de deux points ; en effet, partant du repère de Marseille, on pourra ainsi calculer de proche en proche les altitudes de tous les points que l'on aura intérêt à déterminer.

Les instruments employés dans les opérations du nivellement sont nombreux ; l'un des plus simples est le *niveau d'eau*, que nous allons décrire rapidement.

440. **Niveau d'eau.** — Le *niveau d'eau* est un instrument basé sur les propriétés des vases communicants. Il se compose (*fig.* 188) d'un tube métallique qui doit être, dans les mesures, placé dans une position sensiblement horizontale ; les extrémités coudées de ce tube se relèvent verticalement et se terminent par deux fioles sans fond, en verre, mastiquées sur le tube métallique. Le tout est monté sur un pied en bois.

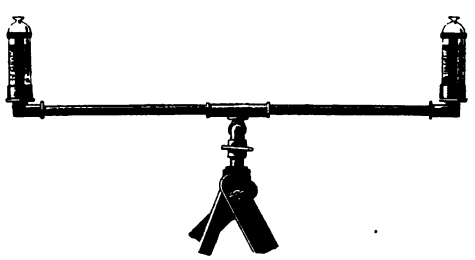


Fig. 188

On verse de l'eau dans le tube de manière que les fioles soient remplies jusqu'aux deux tiers environ. En vertu du principe des vases communicants, les surfaces terminales des liquides sont dans le même plan horizontal; c'est ce plan horizontal qui constitue le *plan de visée* ; l'expérience montre d'ailleurs que la meilleure direction à prendre pour faciliter la visée et la rendre sûre est la tangente intérieure aux deux niveaux circulaires de l'eau dans les fioles (*fig.* 189).

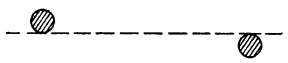


Fig. 189

441. Mire. — La *mire* est l'instrument à l'aide duquel on mesure la distance du sol au plan de visée du niveau d'eau. La mire la plus commune est une règle plate divisée en centimètres (*fig.* 190), le long de laquelle se déplace une plaque de tôle appelée *voyant* et partagée en quatre quarts peints alternativement en rouge et en blanc. La ligne horizontale de séparation des couleurs est la *ligne de foi*. La douille à laquelle est fixé le voyant peut être serrée par une vis de pression contre le montant de la mire ; un évidement où se trouve un index gravé correspond à la ligne de foi et permet de mesurer ses déplacements le long de la règle divisée.

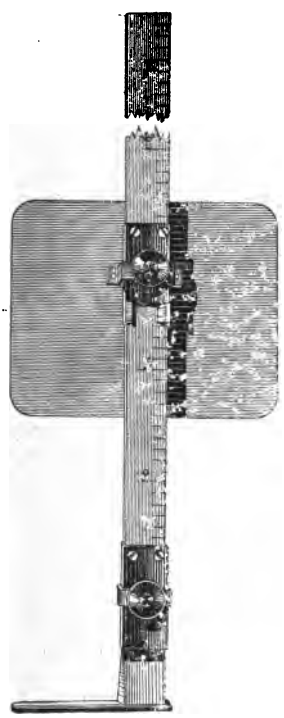


Fig. 190

442. Détermination de la différence des cotes de deux points A et B. — 1° Si les deux points A et B ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, l'opérateur se place avec son niveau d'eau entre ces points (*fig.* 191); de là, il vise le voyant de la mire, que son aide transporte successivement en A et B ; sur

les signes que lui fait l'opérateur, l'aide élève ou abaisse le voyant, jusqu'à ce que la ligne de foi soit dans le plan de visée du niveau

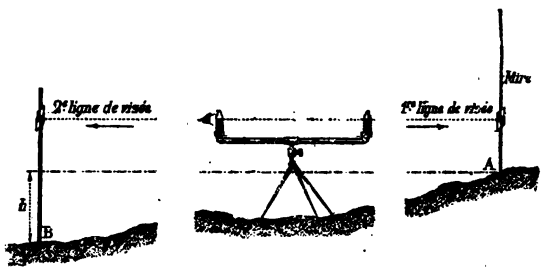


Fig. 191

d'eau. Lorsque cette condition est remplie, l'aide lit et note, dans chacune des deux positions, la hauteur à laquelle se trouve la ligne de foi. La différence h entre les cotes des deux points est manifestement celle des deux lectures faites sur la mire.

2° Lorsqu'il s'agit de trouver la différence des cotes de deux points A et B trop éloignés l'un de l'autre (*fig.* 192) pour qu'on puisse faire des visées sûres, en procédant comme il vient d'être dit (1°), ou lorsque la différence de ces cotes est plus grande que la hauteur de la mire, on établit entre ces points des stations intermédiaires a, b, c, d. On place d'abord le niveau entre A et la première station a, à distance aussi égale que possible de chacun de ces points. Le porte-mire se place en A ; l'opérateur vise la mire et, par signes, fait amener la ligne de foi en A′ dans le plan de visée du niveau. L'aide lit et note la hauteur AA′ qu'on appelle *coup arrière*, puis se porte en a où les mêmes opérations recommencent ; l'aide lit et note de même la hauteur aa' qui s'appelle *coup avant*.

L'opérateur se porte alors avec son niveau entre a et b et les mêmes opérations recommencent ; et ainsi de suite jusqu'entre les deux derniers points. Les hauteurs du voyant ou, comme on dit, les hauteurs de mire étant

m_1, m_2, m_3, . . . pour les coups arrière,
n_1, n_2, n_3, . . . pour les coups avant,

la différence de niveau entre le 1er et le 2e point est $m_1 - n_1$ avec son signe ; entre le 2e et le 3e elle est $m_2 - n_2$, etc.

La différence totale de hauteur entre le dernier point et le premier

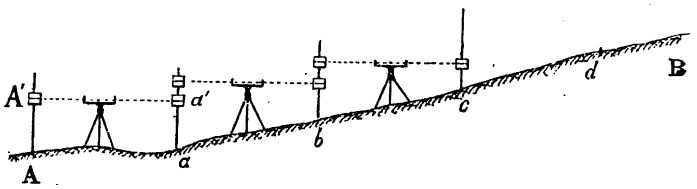


Fig. 192

sera donc

$$m_1 - n_1 + m_2 - n_2 + m_3 - n_3 + \ldots,$$

ou $(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) - (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)$;

autrement dit : *la différence de niveau entre les points extrêmes est égale à la différence entre la somme des coups arrière et celle des coups avant.*

443. Tracé des courbes de niveau sur le terrain. — On peut facilement, au moyen du niveau et de la mire, tracer sur le terrain la ligne de niveau passant par un point A (*fig.* 193). Pour cela, l'aide se transporte d'abord en A, tandis que l'opérateur place le niveau en station en un point O d'où il peut viser un grand nombre de points ayant même cote que le point A. Sur les indications de l'opérateur, l'aide fixe alors le voyant dans le plan de visée du niveau d'eau et plante un jalon en A ; puis, sans toucher au voyant, il se déplace sur le terrain en tenant la mire verticalement, jusqu'à ce que l'opérateur aperçoive de nouveau la ligne de foi dans le plan de visée du niveau qui est resté en station au point O, mais dont on fait tourner le tube en le laissant toujours horizontal ; à ce moment, l'opérateur fait signe à l'aide de s'arrêter et de placer un nouveau jalon ; le pied B de ce jalon est à la même cote que le point A. On détermine de la même manière d'autres points C, D,... ayant même cote que le point A et on les jalonne pareillement. Il ne reste plus qu'à déterminer sur la carte les projections des points A, B, C, D et à joindre ces projections par un trait continu pour avoir la ligne de niveau du point A.

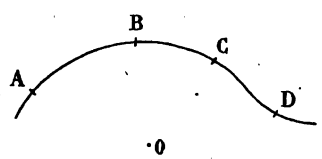


Fig. 193

§ IV.

Signes et teintes conventionnels.

444. Signes conventionnels. — Tous les détails de la planimétrie sont représentés sur la carte par des signes conventionnels, parfois accompagnés de mots ou d'abréviations explicatifs. Les objets sont généralement représentés à leur grandeur réduite à l'échelle, mais, à cause de leur très grande importance, les routes, les chemins de fer, les canaux ont dû être grossis pour attirer l'œil.

Ces signes et ces abréviations peuvent varier d'une carte à l'autre Nous nous bornerons, dans ce qui suit, à parler de la carte de France, au 1/80 000 publiée par le service géographique de l'armée et dite carte d'État-major; on trouvera le tableau de ses signes conventionnels à la fin du volume (Pl I).

On trouve aussi sur la carte quelques nombres ; ils indiquent l'altitude des points qu'ils accompagnent (Voir Pl. I, 2e Colonne, *Nota*).

445. Teintes conventionnelles. — Pour rendre sensible à l'œil le relief d'un terrain à la simple inspection de la carte, on a recours à des teintes dont l'intensité varie avec la pente du terrain : on arrive ainsi à obtenir une impression immédiate du relief, qu'on nomme *effet* ou *modelé*.

Lorsque les courbes de niveau sont très rapprochées, leurs traits suffisent à rendre apparent le relief du sol (*fig.* 199 et 201).

Lorsque ces courbes sont très espacées, on se sert en général de l'hypothèse suivante pour fixer la teinte à donner à chaque partie du terrain.

446. Hypothèse de l'éclairement zénithal. — On suppose le terrain éclairé par des rayons lumineux verticaux, qui viennent du zénith, c'est-à-dire dirigés de haut en bas.

Si l'on coupe un faisceau prismatique de tels rayons par un plan horizontal et par un plan oblique, les deux sections obtenues ABCD

et A'B'C'D' (*fig.* 194) reçoivent la même quantité de lumière, celle qui passe à l'intérieur de la surface prismatique. Mais comme la surface oblique A'B'C'D' est plus grande que la surface horizontale ABCD, chaque unité de surface du quadrilatère A'B'C'D' reçoit moins de lumière qu'une unité de surface du quadrilatère ABCD. Par suite, une surface oblique est moins éclairée qu'une surface horizontale et son éclairement diminue lorsque sa pente augmente.

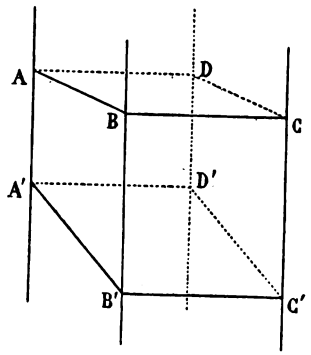


Fig. 194

Aussi, dans les cartes teintées d'après cette hypothèse, on représente en blanc les parties horizontales du terrain et les parties inclinées sont d'autant plus teintées que leur pente est plus raide.

447. **Hachures.** — Un des moyens ordinaires pour obtenir ces teintes dans une carte consiste à tracer des hachures (*fig.* 195) entre les courbes de niveau que l'on efface ensuite. Les hachures sont des portions de ligne de plus grande pente que le dessinateur trace entre deux courbes de niveau consécutives. On fait varier leur écartement et leur épaisseur, suivant qu'on veut obtenir une teinte plus ou moins foncée.

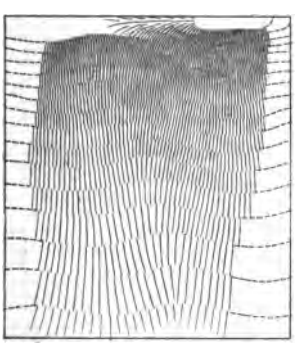


Fig. 195.

Le tracé des hachures est réglé par des conventions que nous allons exposer sommairement

448. **Loi du quart.** — On nomme ainsi la *convention* suivante qui détermine l'écartement des hachures : *l'écartement des hachures est égal au quart de leur longueur.*

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de tracer des hachures entre

deux courbes de niveau consécutives *ab*, *cd* (*fig.* 196). On mène une première hachure *ac*; on porte sur l'une des lignes de niveau la longueur $ab = ac$ et on partage ensuite cette longueur *ab* en quatre parties égales ; cela fait, par les points de division on mène les hachures normales aux deux courbes. On continue ainsi de proche en proche et on voit que les hachures seront d'autant plus rapprochées que les courbes de niveau seront elles-mêmes plus resserrées ; par suite, les portions de terrain à pente raide seront, sur la carte, plus foncées que celles où la pente est douce ; ce résultat apparaît nettement sur la figure 195.

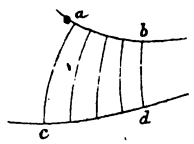


Fig. 196

Il y a plusieurs exceptions à la convention précédente.

1° Quand l'écartement des courbes devient inférieur à 2^{mm} tout en restant supérieur à 1/4 de millimètre, on conserve aux hachures l'écartement uniforme de 1/2 millimètre, mais on force leur épaisseur ; au-dessous de l'écartement de 1/4 de millimètre, on emploie un signe particulier qui s'applique également aux rochers et aux escarpements (Voir Pl. II à la fin du volume).

2° Quand la pente est inférieure à 1/64, ce qui correspond, pour l'équidistance graphique de 1/4 de millimètre (qui est celle de la carte de l'État-Major), à un écartement de courbes de plus de 16 millimètres, on ne met plus de hachures. En effet, la pente de 1/64 étant extrêmement douce, les hachures seraient très éloignées les unes des autres et pourraient être confondues avec des lignes de la planimétrie (chemin, fossé, ruisseau).

449. L'épaisseur des hachures est déterminée de façon que *le rapport de la surface noire couverte par les hachures à la surface qui reste blanche sur le papier soit égal au* $\frac{3}{2}$ *de la pente du terrain* dans la région où se trouvent ces hachures. L'épaisseur des hachures augmente donc avec la pente, ce qui contribue à renforcer le modelé.

§ V.

Mouvements du sol.

450. Les principaux éléments des accidents du terrain sont les *versants*, les *croupes*, les *ravins*. Ils présentent avec certaines figures géométriques une analogie qu'il ne faut cependant pas exagérer. Nous allons les examiner d'abord et nous indiquerons ensuite leurs combinaisons.

451. **Versant.** — Un versant est une surface de terrain à peu près plane et inclinée sur l'horizon ; de cette définition, il résulte qu'un

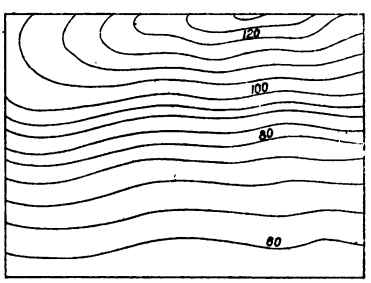


Fig. 197

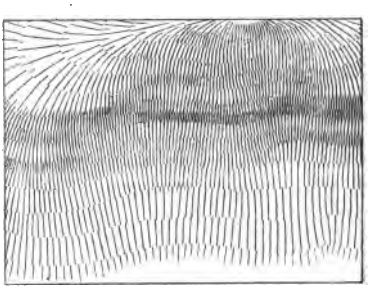


Fig. 198

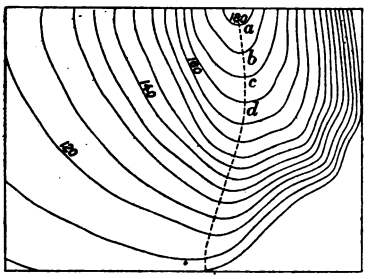
Versant.

versant sera représenté par des courbes de niveau à peu près rectilignes et sensiblement parallèles entre elles (*fig.* 197) ou par des hachures disposées par bandes également parallèles (*fig.* 198).

452. **Croupe.** — La croupe est l'accident formé par la rencontre de deux versants simples qui se raccordent suivant une surface arrondie.

La figure 199 est une succession de courbes de niveau représentant une croupe formée par deux versants se raccordant à peu près suivant la ligne ABCD. La figure 200 est la représentation de la même croupe au moyen de hachures; on voit que ces hachures s'épanouissent en éventail au voisinage du raccordement des deux versants.

On appelle *faîte* ou *ligne de faîte* la ligne de rencontre de deux versants dont les horizontales sont à peu près parallèles.



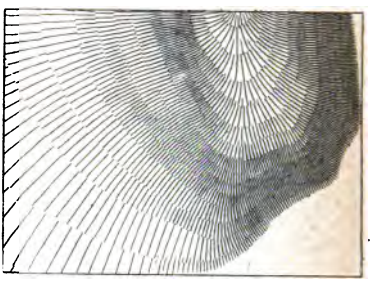
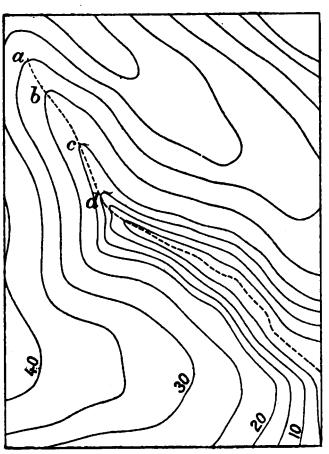


Fig. 199 Fig. 200

Croupe.

453. **Ravin.** — Un ravin est un accident constitué par deux versants qui, en se raccordant, déterminent une concavité; la ligne suivant laquelle se raccordent ces versants a reçu le nom de *thalweg* ; le thalweg est la ligne suivie par les eaux au fond du ravin.

La figure 201 est une succession de courbes de niveau représentant



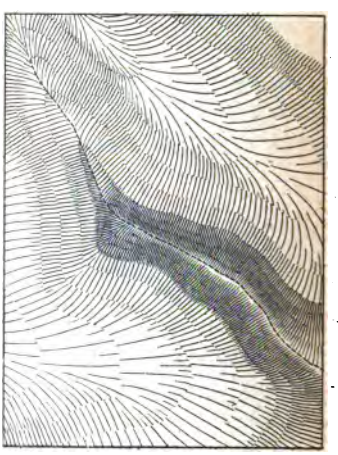


Fig. 201 Fig. 202

Ravin.

un ravin dont le thalweg *abcd* a été tracé. La figure 202 est la représentation du même ravin au moyen des hachures ; on voit que

ces hachures convergent vers le thalweg et sont plus clairsemées dans son voisinage.

Les croupes et les ravins semblent avoir des représentations analogues ; cependant il est facile de ne pas les confondre. D'abord le sens de la croissance des cotes sur les courbes empêche toute erreur ; avec les hachures, dans la plupart des terrains, on reconnaît les ravins à leur forme plus étranglée, tandis que les croupes sont généralement plus larges.

Un ravin en s'élargissant prendra le nom de *vallon* ou de *vallée*, suivant son importance.

La rencontre de deux thalwegs s'appelle un *confluent*.

454. **Mamelon.** — Un *mamelon* est un accident en saillie, qui peut être considéré comme formé par l'adossement de deux ou plusieurs croupes.

Un mamelon est représenté (*fig.* 203) par une série de courbes

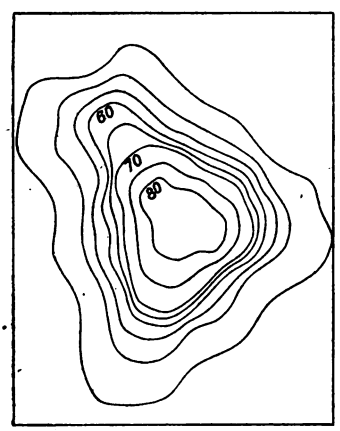


Fig. 203

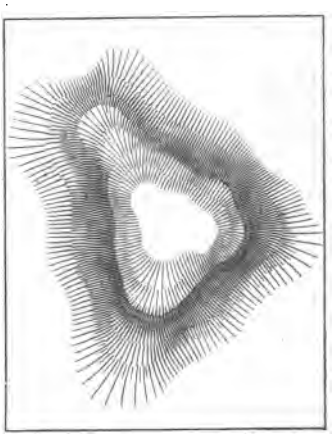


Fig. 204

Mamelon.

de niveau fermées telles que chacune d'elles renferme toutes celles dont les cotes sont plus élevées. La figure 204 représente le même mamelon au moyen des hachures.

Lorsque la partie la plus élevée d'un mamelon a une assez grande étendue, sa surface est généralement peu accidentée et peu inclinée ; elle prend alors le nom de *plateau*. Un petit mamelon se nomme *butte*.

455. **Col.** — Un col peut être considéré à la fois comme formé par l'opposition de deux croupes et l'opposition de deux ravins (*fig.* 205).

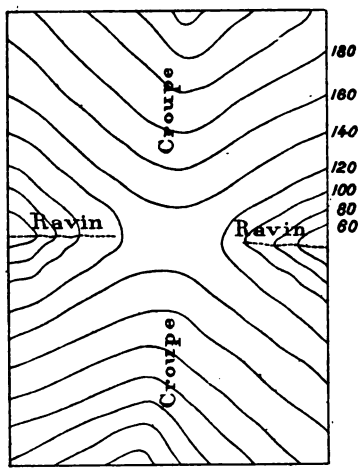


Fig. 205

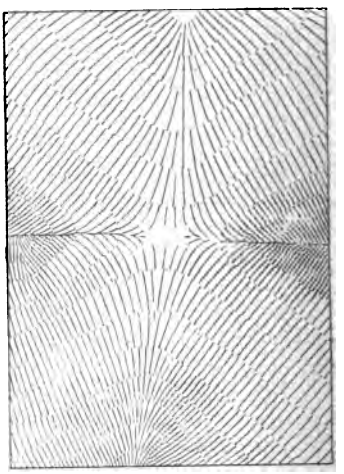


Fig. 206

Col.

de telle manière que le point de cote *minimum* sur les lignes de faîte des croupes soit en même temps le point de cote *maximum* sur les thalwegs des vallées.

La figure 205 est la reproduction du levé d'un col au moyen de courbes de niveau ; la figure 206 est la représentation du même col en hachures.

La forme d'un col est en gros celle d'une selle de cavalerie.

§ VI.

Lecture de la Carte d'État-Major.

456. **Indications générales.** — Les feuilles de la carte d'État-Major à l'échelle de $\frac{1}{80\,000}$ sont des rectangles dont les côtés ont pour longueur 50^{cm} et 80^{cm}, correspondant à un rectangle de terrain de 40^{km} sur 64^{km} ; ces feuilles sont aussi livrées au public par quarts

ayant 25cm sur 40cm. Nous supposerons dans ce qui va suivre que le lecteur a la feuille entière entre les mains.

457. Chaque feuille complète porte un numéro d'ordre dans le haut de la marge à droite, et comme titre le nom de la localité la plus importante qui s'y trouve. Dans la marge inférieure se trouvent des échelles graphiques (431, 432).

Le cadre de la carte est entouré d'une première graduation composée de parties alternativement grises et blanches ; leurs divisions correspondent à des points dont la latitude ou la longitude sont exprimées en nombres entiers de minutes sexagésimales. En dedans se trouve une deuxième graduation analogue, mais en minutes centésimales de grades. Ces graduations permettent de tracer sur la carte les méridiens et les parallèles et par conséquent de déterminer approximativement la longitude et la latitude d'un point quelconque de la carte.

D'ailleurs, sur chaque feuille on a tracé les méridiens et les parallèles espacés de 10′ en 10′.

Dans les quatre angles des marges sont indiquées les coordonnées (longitude et latitude) en grades et fractions décimales de grades de chacun de ces angles et leurs distances en mètres au méridien de Paris et au parallèle dont la latitude est 45° (ou 50ᵍ).

458. **Lecture de la carte.** — Lorsqu'on connaît très bien les signes conventionnels (444), il est facile, avec un peu d'habitude, de lire la planimétrie de la carte d'État-Major. Quant à la lecture du relief, elle ne peut s'apprendre qu'à la longue par la comparaison de la carte avec le terrain qu'elle représente.

Nous conseillons donc aux élèves de se procurer une carte d'un pays, moyennement accidenté, qu'ils connaissent bien et de se promener ensuite sur le terrain en cherchant à retrouver tous les détails qu'ils apercevront.

Nous donnons à la fin du volume, à titre de spécimen cartographique, le quart S.-O. de la feuille de Paris [n° 48 de la carte d'État-Major] (Pl. II).

459. **Orientation de la carte.** — Pour que la comparaison du terrain et de la carte soit commode, il faut disposer celle-ci de façon

que les méridiens (et non les côtés du cadre) soient parallèles à la direction Nord-Sud.

On peut y arriver de deux façons : sans instrument, ou à l'aide d'une petite boussole.

460. Dans le premier cas, il convient au début de poser la carte sur un support horizontal, table, parapet en pierre, borne, etc., où l'on peut la faire tourner et la maintenir commodément jusqu'à ce qu'on ait arrêté définitivement sa position. Si l'on tient compte de ce que les méridiens sont placés dans la direction Nord-Sud, toutes les droites joignant deux points sur la carte seront parallèles aux plans verticaux contenant les points correspondants du terrain, et inversement.

Par suite, si on connaît le pays, on cherche sur la carte la position du point où l'on se trouve, qu'on appelle *station,* et celle d'un point qui en est vu, un clocher par exemple ; on tourne alors la carte jusqu'à ce que la droite qui, sur elle, joint ces deux points soit bien dirigée, ce qu'on vérifie en se plaçant du côté opposé au point visé, et en alignant dans sa direction la droite qui sur la carte joint la station et ce point.

Pour plus de sûreté, on exécute une seconde opération analogue à l'aide d'un autre point éloigné dans une direction différente de la première, de manière à vérifier l'orientation donnée à la carte.

Dans certains cas, l'opération est plus simple ; si, par exemple, on se trouve sur une route en ligne droite sur une grande longueur, rien n'est plus facile que de tenir la carte, même à la main, de façon que le prolongement de la ligne de la carte qui représente cette route soit dirigé suivant la route.

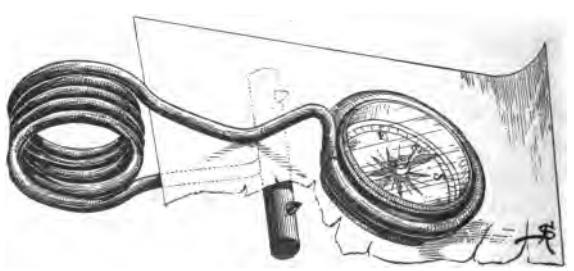


Fig. 207

461. **Boussole à pince.** — L'emploi d'une petite boussole bre-

loque munie d'une pince formée d'un fil de laiton enroulé en ressort (*fig.* 207) permet d'opérer plus commodément. On tient à la main la carte pliée de façon que son épaisseur soit suffisante, la partie utile étant seule visible; on fixe la boussole dessus en un point quelconque mais en s'astreignant à ce que la ligne Nord-Sud du cadran fasse avec les méridiens tracés sur la carte un petit angle égal à la déclinaison. Cette déclinaison est occidentale et d'environ 15°. Il est alors facile de tenir constamment la carte de façon que l'aiguille reste au dessus de cette ligne.

462. Poche à cartes ou liseur. — On emploi aussi de plus en plus la *poche à cartes ou liseur*, enveloppe transparente (en celluloïd ou *mica*) dans laquelle on introduit la carte après l'avoir pliée suivant un rectangle dont les côtés ont en général la direction des méridiens ou des parallèles. Sur la surface extérieure de la poche est collée une petite boussole (*fig.* 208) dont on se sert comme il a été indiqué au paragraphe précédent pour orienter la carte.

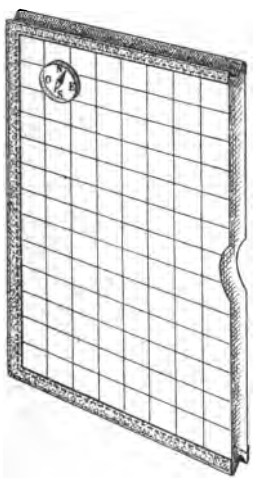


Fig. 208.

Sur l'une des faces de la poche est tracé en traits rouges un quadrillage dont le côté est la longueur qui représente à l'échelle du $\frac{1}{80\,000}$ un kilomètre du terrain, soit $1^{cm},25$; ce quadrillage sert à l'évaluation rapide des distances sur la carte et constitue une sorte d'échelle graphique généralisée qui se trouve reportée sur la carte même, grâce à la transparence de l'enveloppe.

L'autre face de la poche porte souvent un quadrillage de côté 1^{cm} pour l'évaluation des distances sur les cartes à l'échelle du $\frac{1}{100\,000}$ ou du $\frac{1}{50\,000}$. On utilise ce quadrillage pour la carte de France au $100\,000^{e}$ publiée par le ministère de l'Intérieur ou pour la carte de l'Algérie (Échelle au $50\,000^{e}$) ou les quelques nouvelles feuilles de la carte de France au $50\,000^{e}$ publiée par le service géographique de l'armée.

Le liseur présente en outre l'avantage de mettre la carte à l'abri des souillures.

463. **Usage de la carte sur le terrain.** — On oriente d'abord la carte (457). Puis on se met en route à partir d'un point connu dans une direction que l'on détermine et on a soin, dans les débuts, de consulter fréquemment la carte pour y retrouver les positions qu'on occupe successivement sur le terrain. On peut du reste reporter assez exactement sur la feuille ces différentes positions, en mesurant au pas les distances parcourues.

A chaque station, on examine dans les différentes directions, aussi loin qu'on peut les distinguer, les objets et les accidents du terrain ; on les compare avec leur représentation sur la carte (Planche II, à la fin du volume) ; on se rend vite un compte exact de la nature de cette représentation, en même temps qu'on voit quels sont les objets que le topographe a dû omettre et quels sont ceux qu'il a cru devoir exagérer (444).

Tout en parcourant le terrain, on observe si l'itinéraire que l'on suit rencontre des pentes ascendantes ou descendantes et on examine de quelle manière elles sont représentées sur la carte. On considère aussi les accidents qui se trouvent de part et d'autre de cet itinéraire, mais il faut se méfier des appréciations faites à vue. L'évaluation des distances est en effet facilement entachée d'erreurs, qui tiennent principalement à ce que la transparence de l'air est extrêmement variable.

Il faut surtout prendre des directions sur des points qu'on a reconnus, les reporter sur la carte, examiner les objets qui s'échelonnent à droite et à gauche de chacune d'elles, les comparer avec la carte et procéder toujours du connu à l'inconnu. Enfin, toutes les fois que la chose est possible, on cherche à voir les mêmes objets sous plusieurs aspects. Sans cette précaution, il arrive aux personnes les plus exercées de commettre des erreurs qu'elles corrigent bientôt ; mais le débutant ne manque jamais de mettre les siennes sur le compte de la carte.

ÉPURES

PROPOSÉES AUX CONCOURS D'ADMISSION AUX ÉCOLES

INSTITUT AGRONOMIQUE

On trace sur un plan horizontal un triangle ABC dont les côtés ont pour longueurs respectives :

$$AB = 55^{mm}, \quad AC = 75^{mm}, \quad BC = 65^{mm}.$$

Sur les verticales des points A, B, C, on porte $AD = 35^{mm}$, $BE = 60^{mm}$, $CF = 30^{mm}$, et on demande :

1° de déterminer l'angle du plan du triangle DEF avec le plan horizontal (on indiquera cet angle sur l'épure par un arc de cercle de 25^{mm} de rayon, décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés) ;

2° de construire, en reportant les données sur une autre partie de la feuille de dessin, la projection horizontale du cercle circonscrit au triangle DEF.

(On déterminera les axes de l'ellipse ainsi obtenue et on indiquera à l'encre les constructions qui fournissent l'un des points de cette ellipse et la tangente en ce point.)

(1890, *1re session.*)

On donne sur un plan horizontal un triangle ABC dont les côtés sont $AB = 60^{mm}$, $AC = 80^{mm}$, $BC = 90^{mm}$. On porte sur la verticale du point A une longueur $AO = 55^{mm}$ et on imagine une sphère, d'un rayon égal à 40^{mm}, ayant pour centre le point O. On demande :

1° de déterminer l'angle que fait avec le plan horizontal le plan tangent à la sphère qui passe par la droite BC et laisse au-dessous de lui le centre de cette sphère ;

2° de construire, après avoir reproduit les données sur une autre partie de la feuille de dessin, la projection horizontale de la section de la sphère sur le plan BOC.

(1890, *2e session.*)

Un triangle équilatéral de 8^{cm} de côté, tracé dans un plan horizontal de projection, sert de base à une pyramide dont les arêtes inclinées sur ce plan ont une même longueur, égale à 11^{cm}.

On circonscrit une sphère à cette pyramide et l'on coupe cette sphère par un plan passant par son centre et par l'un des côtés du triangle de base de la pyramide.

Construire l'ellipse projection horizontale de la section de la sphère ainsi obtenue.

(1891.)

Représenter par ses deux projections un rhéophore composé d'un disque circulaire C de diamètre $d = 8^{cm}$ et d'une tige CI perpendiculaire à ce disque, menée par son centre C et ayant pour longueur $CI = d = 8^{cm}$.

La tige CI fera avec le plan horizontal un angle $\alpha = 40°$ et avec le plan vertical un angle $\beta = 300$. Le disque C sera au-dessus, en avant et à droite de la tige CI. La tige et le disque, supposés d'épaisseur négligeable, seront représentés chacun par un simple trait.

(1894.)

Construire la projection horizontale d'une circonférence.

Données. — Cette circonférence est la base d'un cône droit qui repose par une arête SA sur le plan horizontal de projection; $SA = 8^{cm}$. L'arête SA prolongée rencontre la ligne de terre en B; $AB = 2^{cm},47$ [exactement $AB = 2^{cm}(\sqrt{5} - 1)$], angle $SBx = 45°$; enfin le diamètre de la circonférence est égal à SA. On déterminera un point de la projection et la tangente en ce point, ainsi que les sommets et les tangentes issues de S. On disposera l'épure de façon que le centre de l'ellipse soit au milieu de la feuille.

(1896.)

La ligne de terre est le petit axe de la feuille; O est le centre de la feuille.

La projection horizontale d'une droite D coupe le grand axe de la feuille à 8^{cm} en avant de O et la ligne de terre à 10^{cm} à droite de O. La projection verticale de cette droite passe par O et est parallèle à sa projection horizontale. Un point A se projette horizontalement en O et a une cote de 10^{cm} On mène la perpendiculaire AB du point A sur la droite D rencontrant cette droite en B. Sur AB comme diamètre, on décrit un cercle C dont le plan est perpendiculaire à la droite D. Dans le cercle C, on inscrit un carré dont AB est diagonale et qui sert de base à une pyramide régulière de 8^{cm} de hauteur dont le sommet est vers la gauche.

Représenter par leurs deux projections le cercle C et la pyramide. On distinguera les parties vues et les parties cachées en supposant les plans de projections transparents.

(1903.)

La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille. Un cube, dont le côté vaut 10^{cm}, repose par sa base sur le plan horizontal; les deux sommets les plus en avant de cette base sont symétriques par rapport au grand axe de la feuille, sur une même parallèle à xy, distante de xy de 12^{cm}. De plus, on suppose tracée la circonférence C inscrite

dans la face verticale du cube située le plus en avant. On fait tourner la figure de 30° autour de xy, de façon à la relever ; puis, à partir de cette position, on la fait encore tourner de 60° vers la gauche, autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical passant par le centre du cube. On demande de représenter, dans cette position définitive, par ses deux projections, l'ensemble formé par le cube et la circonférence C.

(1905.)

La ligne de terre xy est le petit axe de la feuille.

Un point O, situé dans le plan horizontal sur le grand axe de la feuille à 6^{cm} en avant de xy, est le centre d'un triangle équilatéral ABC situé dans le plan horizontal, de hauteur égale à 12^{cm} : BC est parallèle à xy et A est le sommet le plus en avant.

ABC est la base d'un tétraèdre régulier SABC situé au-dessus du plan horizontal.

Dans les faces SAB, SAC, SBC on décrit du point S comme centre des circonférences de rayon égal à 8^{cm}.

On demande de représenter par ses deux projections la portion de la surface du tétraèdre SABC comprise à l'extérieur des circonférences.

(1906.)

La ligne de terre XY est le petit axe de la feuille. — Un parallélépipède rectangle P, dont la hauteur vaut 9^{cm} et est dirigée suivant le grand axe de la feuille, a pour base située le plus en avant un carré de 2^{cm} de côté, dont le centre est dans le plan horizontal, et dont deux côtés sont horizontaux : la distance de cette base au plan vertical est de 12^{cm}. — De plus, on suppose tracée dans le plan de cette base une circonférence C de 5^{cm} de rayon, concentrique au carré. On fait tourner la figure de 30° autour de XY, de façon à la relever ; puis à partir de cette position, on la fait encore tourner de 60°, vers la gauche, autour d'une perpendiculaire au plan vertical, passant par le centre du parallélépipède.

On demande de représenter, dans cette position définitive, par ses deux projections, l'ensemble formé par le parallélépipède P et la circonférence C.

(1907.)

ÉCOLE NAVALE

Un cône oblique à base circulaire a pour base une circonférence (C), de centre O et de rayon égal à 35^{mm}, située dans le plan horizontal de cote zéro.

Son sommet S est déterminé par sa projection *s* située à une distance $Os = 50^{mm}$ du point O et par sa cote égale à 109^{mm}.

a est la projection horizontale d'un point A de cote égale à 30^{mm}. La distance *aα* au plan vertical OS est égale à 40^{mm} et la distance Oα à 60^{mm}.

Mener par le point A un plan qui détermine dans le cône donné une section antiparallèle (C'). Construire la projection horizontale de cette section, déterminer ses axes et les points qui se trouvent sur le contour apparent du cône.

Construire les sphères passant : 1° par la base (C) et le sommet S ; 2° par la circonférence (C') et le sommet S ; 3° par les deux circonférences (C) et (C').

Les plans d'intersection de ces trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite ; la déterminer.

(1894.)

Une sphère de rayon $R = 50^{mm}$ est tangente au plan horizontal de cote zéro au point *o*. D'un point A, situé dans ce plan à une distance $oA = 100^{mm}$, on mène successivement :

1° les deux tangentes à la sphère faisant avec la verticale un angle de 40° ;

2° les deux tangentes à la sphère faisant avec l'horizontale oA un angle de 23°.

Ces quatre tangentes étant considérées comme les arêtes d'une pyramide indéfinie de sommet A, tracer la projection du volume commun à la sphère et à cette pyramide.

(1895.)

Une sphère de rayon $R = 45^{mm}$ est tangente au plan horizontal de cote o en un point A. Par ce point A on mène une droite *d* faisant avec le plan horizontal un angle de 60° et l'on considère le cône de révolution dont cette droite *d* est l'axe et dont l'angle au sommet est de 15°.

Tracer le contour apparent de ce cône et les projections de son intersection avec la sphère : 1° sur le plan horizontal ; 2° sur un plan vertical perpendiculaire à la projection de la droite *d* sur le plan horizontal ; 3° sur un plan vertical parallèle à cette droite.

On supposera dans le tracé que la sphère est un corps opaque dont on a enlevé la partie commune à la sphère et au cône.

(1897.)

(*Géométrie cotée.*) Dans le plan horizontal de cote zéro on donne une droite D et un point A sur cette droite.

Mener par la droite D deux demi-plans rectangulaires P et P', au-dessus du plan horizontal, dont l'un fasse avec ce plan un angle de 30°.

Tracer, sur le plan horizontal et sur le plan vertical perpendiculaire à D, le contour apparent du cône solide droit à base circulaire donné ayant son sommet en A et tangent aux deux demi-plans P et P'.

Le cône droit a une hauteur égale à 80^{mm} et un demi-angle au sommet de 30°.

On commencera, pour résoudre la question, par mener par A une droite faisant avec chacun des deux demi-plans un angle de 30°.

(1898.)

(*Géométrie cotée*). Un tétraèdre ABCD a pour base BCD un triangle équilatéral, et la face ABC est un triangle isocèle de sommet A (AB = AC). On donne le côté BC = 95^{mm} du triangle équilatéral BCD et les deux angles ABD = 50° et ABC = 65°.

Construire les projections de ce tétraèdre, dont la base BCD est dans le plan horizontal de cote zéro, sur le plan horizontal et sur un plan vertical perpendiculaire à BC.

Trouver le centre O de la sphère circonscrite. De ce point comme centre on décrit une sphère S tangente aux faces ABD, ADC : intersection de cette sphère avec la face ABC. Construire la tangente en un point de cette courbe d'intersection. Déterminer les points qui se trouvent en projection horizontale sur le contour apparent de la sphère.

Dans le tracé graphique, on supposera que le tétraèdre ABCD et la sphère S sont deux corps opaques se pénétrant mutuellement.

(1899.)

CUBE ÉVIDÉ PAR UN ANGLE DIÈDRE. — Ligne de terre à 16^{cm} du bord inférieur de la feuille.

Cube. — On donne deux points A et B, situés dans le premier dièdre et placés sur une ligne de bout dont les projections sont sur l'axe de la feuille.

A a pour éloignement 2^{cm} et pour cote 7^{cm} ;
B — 11^{cm} — 7^{cm}.

Ces points sont les extrémités d'une diagonale d'une section centrale faite dans le cube parallèlement aux plans des deux faces (F). Ces faces (F) sont d'abord supposées horizontales. Pour placer le cube dans sa position définitive, on suppose qu'il tourne autour de AB, en sens inverse des aiguilles d'une montre, d'un angle de 60°.

Angle dièdre. — Considérons la face du cube qui, avant la rotation, se trouvait en avant et à droite. L'arête du dièdre est l'intersection de cette face dans sa situation définitive avec le plan vertical qui passe par A et B. Les faces du dièdre passent par les centres des faces (F) du cube dans leur position définitive.

On représentera ce qui reste du cube, supposé plein et opaque, après enlèvement de la portion située dans l'angle dièdre.

(1904.)

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR

Une sphère de centre O, de rayon égal à 9^{cm}, est tangente au plan horizontal. Soient AB un diamètre horizontal de la sphère, C le milieu de OA, D le point le plus élevé de la sphère. Par les trois points B, C, D, mener trois parallèles faisant des angles de 45° avec le plan horizontal et perpendiculaires à la direction AB. Trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère et de la surface prismatique indéfinie ayant ces trois parallèles pour arêtes latérales.

Représenter la surface (supposée opaque) de la sphère comprise dans la surface prismatique. Construire les sommets des ellipses formant la projection de l'intersection et écrire les cotes des points correspondants.

Mener les tangentes à ces ellipses en leurs points situés sur les projections des arêtes.

Construire les projections des points de l'intersection déterminés par le plan horizontal de cote 16^{cm}.

Mener à l'intersection les tangentes parallèles aux côtés du triangle BCD et écrire les cotes des points de contact.

(1895.)

Tracer à 8^{cm} du bord inférieur de la feuille une droite sur laquelle on prendra $sa = 10^{cm}$, $sb = 25^{cm}$, $sh = 27^{cm}$, s étant à 12^{cm} du bord de la feuille à droite du dessinateur. s est la projection horizontale du sommet S d'un cône de révolution. La cote du sommet S est de 14^{cm}.

a et b sont les traces horizontales des deux génératrices du cône situées dans le plan projetant horizontalement son axe.

Un triangle isocèle cad situé dans le plan horizontal a sa base $cd = 5^{cm}$; sa hauteur relative à cd est ah.

Ce triangle est la base d'un prisme, dont les arêtes ont une pente égale à $\frac{10}{27}$; l'arête issue de a coupe Ss entre S et s.

Représenter la projection horizontale de la partie du cône solide et opaque extérieure au prisme et comprise entre le plan horizontal et son sommet.

(1896.)

Une sphère est tangente au plan horizontal en un point A ; elle passe par un point B qui a pour cote 72^{mm} et qui se projette en un point b à une distance de A égale à 96^{mm}. (Placer A et b sur une droite distante de 115^{mm} du bord inférieur de la feuille, A à 20^{mm} à gauche du milieu de cette droite et b à gauche de A).

Considérer le plan P mené par le point A perpendiculairement au rayon OB et le triangle équilatéral CDE inscrit à la section de cette sphère par ce plan, en plaçant horizontalement le côté DE, de manière que sa cote soit inférieure à celle de C. Sur la perpendiculaire en C au plan P, prendre un point S de cote égale à 240^{mm}.

La sphère étant supposée opaque, représenter la portion de son volume comprise dans le trièdre dont les arêtes sont les droites indéfinies SC, SD, SE.

(1897.)

Données. — 1° Un tétraèdre SMNP dont les faces MNP et SMN sont des triangles équilatéraux ; la première est dans le plan horizontal. MN égal à 220^{mm} est parallèle au bord inférieur de la feuille et à une distance de ce bord égale à 50^{mm}. La pente de la face SMN est $\frac{1}{1}$. Le tétraèdre est au-dessus du plan horizontal et se projette au-dessus de MN.

2° Un hémisphère de rayon égal à 70^{mm}, reposant par sa base sur le plan horizontal et au-dessus de ce plan. Le centre de cet hémisphère est situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de MN, au-dessus et à 90^{mm} de MN.

Représenter la projection horizontale de la portion supposée opaque de l'hémisphère intérieure au tétraèdre. — Écrire à l'encre rouge les cotes exprimées en millimètres des sommets utiles des courbes d'intersection. — Représenter en traits noirs et fins les lignes de niveau de ce solide déterminées par des plans équidistants de 10^{mm}, à partir du plan horizontal. — Construire les tangentes aux intersections des deux solides aux points qui ont pour cote 50^{mm}, puis celles qui se projettent perpendiculairement à MN.

(1898.)

Tracer une droite parallèle au bord inférieur de la feuille à 10^{cm} de ce bord ; sur cette droite marquer un point s, à 2^{cm} du bord de droite, et prendre sA égale à 20^{cm}. Le point s est la projection horizontale d'un point S de cote 20^{cm} et la droite sA est celle d'une droite SA de l'espace.

On mène par SA deux plans de pente $\frac{\sqrt{3}}{1}$ et par S le plan perpendiculaire au plan SsA, de pente $\frac{2}{1}$, et coupant sA entre s et A. Ces trois plans et le plan horizontal déterminent un tétraèdre SABC.

Un cône, dont la directrice est une circonférence située dans le plan horizontal, de centre A et d'un diamètre égal à 11^{cm}, a pour sommet un point I, de cote 10^{cm} et se projetant horizontalement en s.

Représenter le corps solide opaque commun à ce cône et au tétraèdre SABC.

Construire les tangentes aux projections horizontales des courbes d'intersection de ces deux solides : 1° aux points d'intersection situés sur SA ; 2° aux points où ces tangentes aux projections sont perpendiculaires à sA ; 3° aux points où elles sont parallèles à AB et à AC.

(1899.)

Sur une droite parallèle au bord inférieur de la feuille et située à 14 centimètres de ce bord, marquer les points A et *b*. A à 12 centimètres et *b* à 22 centimètres du bord de gauche.

A est le centre d'une sphère de 10^{cm} de rayon et *b* est le point de contact avec le plan de comparaison (plan de la feuille) d'une sphère de 10^{cm} de diamètre, dont le centre est B.

Soit I le point où la droite AB perce le plan horizontal tangent à la fois à ces deux sphères, et soit C le point de cote maximum de l'intersection de ces mêmes sphères ; soit enfin P le plan qui a IC pour ligne de plus grande pente.

Représenter la projection horizontale de l'ensemble des portions des surfaces sphériques qui est compris entre le plan de comparaison et le plan P. On supposera le plan P transparent, les surfaces sphériques opaques, et on supposera enlevée la portion de chaque surface sphérique comprise dans l'autre sphère.

Construire les projections horizontales des tangentes menées de I aux sections faites dans les sphères par le plan P. Inscrire les cotes du point I, des points de contact des tangentes précédentes et des points de contact des tangentes menées aux deux sections planes : 1° parallèlement au plan horizontal ; 2° parallèlement au plan vertical contenant les centres des sphères.

(1900.)

Sur une droite parallèle au bord inférieur de la feuille, et à 13^{cm} de ce bord, marquer les points *s*, T, *o*, respectivement à 3^{cm}, 6^{cm} et 20^{cm} du bord de droite. Ces points sont situés dans le plan de comparaison désigné par H. *s* est la projection sur H d'un point S de cote 2^{cm}, *o* celle d'un point O de cote 8^{cm}.

Un cône de révolution a pour sommet le point S et pour base un cercle de centre O ayant 10^{cm} de rayon.

T est le sommet d'un angle trièdre dont une arête TA, de pente $\frac{2}{1}$, se projette suivant T*o*, les cotes croissant de T vers *o*. Les deux faces qui passent par TA ont chacune pour pente $\frac{21}{10}$. La troisième face est sur H.

On considère la partie du cône située à l'intérieur du trièdre ; représenter la projection sur H de ce solide supposé opaque.

Les génératrices de contour apparent du cône rencontrent la base de ce cône en deux points ; marquer leurs cotes.

Les deux premières faces du trièdre coupent le cône suivant des arcs d'ellipses ; marquer les cotes des points où ces arcs rencontrent le contour apparent du cône et où ils rencontrent les génératrices se projetant suivant *so*.

La troisième face coupe le cône suivant une hyperbole ; construire les asymptotes de cette courbe. Enfin, mener les tangentes à cette hyperbole et au cercle de base du cône, aux points où ces deux courbes se coupent.

(1901.)

On construit sur le plan horizontal un triangle isocèle *sab* dans lequel $sa = sb = 105^{mm}$ et $ab = 182^{mm}$. *ab* est parallèle au bord de droite de la feuille et à 100^{mm} de ce bord ; *a* est à 10^{mm} du bord

inférieur de la feuille ; s est à droite de ab. Un point S, de cote 210^{mm}, se projette en s.

Par chacune des droites Sa et Sb on mène les plans de pente $\frac{2}{1}$ et $\frac{5}{2}$ dont les traces rencontrent à gauche de ab le prolongement de la hauteur sh du triangle sab. On considère le quadrilatère convexe formé par ces quatre traces et on le prend pour base d'une pyramide ayant S pour sommet.

Une droite parallèle à ab, ayant pour cote 18^{mm}, se projette à une distance de ab égale à 90^{mm} et à gauche de ab. Elle est l'axe d'un cylindre de révolution dont le rayon est de 30^{mm}.

Représenter la surface opaque de la partie de la pyramide qui est extérieure au cylindre. Tracer les projections horizontales des tangentes à l'intersection aux points situés : 1° sur le contour apparent horizontal du cylindre ; 2° sur la génératrice la plus élevée ; 3° sur la génératrice qui est dans le plan horizontal et à gauche de la projection de l'axe. Mener encore à la projection horizontale les tangentes parallèles à sh et les plus rapprochées de sh. Enfin marquer les cotes des points de contact.

(1902.)

1° Sur une parallèle au bord inférieur de la feuille, à 23 centimètres de ce bord et à égale distance du milieu de la feuille, on prend à gauche un point A, à droite un point B, tels que AB = 14 centimètres. On considère deux sphères de même rayon tangentes entre elles, situées au-dessus du plan de comparaison et tangentes à ce plan l'une en A, l'autre en B. Une troisième sphère de rayon égal à 4 centimètres est tangente aux deux premières et au plan de comparaison en un point C qui est à déterminer et que l'on prendra du côté du bord inférieur de la feuille par rapport à AB.

2° Des points A, B, C on abaisse des perpendiculaires sur le plan des centres des trois sphères ; elles coupent ces sphères respectivement aux points A′, B′, C′ autres que A, B, C. Déterminer les projections et les cotes de ces points.

3° Les droites AA′, BB′, CC′ prolongées sont les arêtes latérales d'un prisme triangulaire indéfini. Déterminer par points les sections faites dans les trois sphères par les faces latérales de ce prisme et représenter ce qui reste des sphères quand on enlève le prisme et les portions des sphères intérieures à ce prisme.

On passera à l'encre la construction des points de cote 10 centimètres des sections de la sphère de gauche, des tangentes en ces points, des points des sections situés sur les contours apparents et enfin les tangentes aux sections aux points A, B, C, A′, B′, C′.

(1904.)

Un tétraèdre régulier SABC repose par sa base ABC sur le plan de comparaison. L'arête du tétraèdre est égale à 15 centimètres. Le côté CB est parallèle aux grands côtés de la feuille. Le sommet S est à égale distance des deux grands côtés et à 18 centimètres du bord inférieur de la feuille.

Dans le triangle ASC, face du tétraèdre, on inscrit un cercle. On construit dans ce cercle un hexagone régulier dont un des côtés est parallèle à AC. Cet hexagone est la section par la face ASC d'un

prisme dont les arêtes sont parallèles à l'arête SB du tétraèdre Le centre de gravité de la face ASB du tétraèdre est le centre d'une sphère passant par A.

Déterminer l'intersection du prisme et de la sphère.

Représenter la sphère supposée pleine en enlevant la partie de ce solide comprise dans le prisme.

(1905.)

Partie restante d'un cube creux entamé par un autre cube. — *Cube* (C_1). Côté $= 10^{cm}$; un sommet est au point O (o, o, o) ; le centre est sur Oz ; le plan vertical yOz est un plan de symétrie, et l'arête qui est dans ce plan et qui passe par le point O est du côté de Oy par rapport au plan xOz.

Cube (C_2). Il se déduit du cube (C_1) en faisant subir à ce cube une translation qui amène le sommet placé en O au point (2^{cm}, o, o) suivie d'une rotation de 50 grades, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour de la diagonale verticale.

On représentera ce qui reste du cube (C_1), supposé creux et opaque, après enlèvement de la partie qui se trouve dans le cube (C_2).

(1907.)

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

CHAPITRE I. — **Rabattement d'une figure plane sur un plan de front** 1
Théorie du rabattement 1
Problème du relèvement 6
Exercices 8

CHAPITRE II. — **Changement du plan horizontal** 10
Théorie du changement de plan horizontal 10
Quelques applications du changement de plan horizontal . . . 14
Exercices 17

CHAPITRE III. — **Rotation autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection** 19
Exercices 27

CHAPITRE IV. — **Application du changement d'un plan de projection et des rotations à la détermination des distances** 29
Distance de deux points 29
Distance d'un point à un plan 31
Distance d'un point à une droite 33
Perpendiculaire commune à deux droites et plus courte distance 35
Exercices 43

CHAPITRE V. — **Application du changement d'un plan de projection et des rotations à la détermination des angles** . 44
Angle de deux droites 44
Angle d'une droite et d'un plan 46
Angle de deux plans. — Angle d'un plan avec les plans de projection 51
Détermination des éléments d'un trièdre 57
Exercices 62

CHAPITRE VI. — **Projection du cercle** 64
Exercices 72

CHAPITRE VII. — **La Sphère** 74
Rappel des propriétés géométriques de la sphère 74
Représentation de la sphère 76

Pages.

Parallèles horizontaux ou de front. Détermination d'un point de la sphère 81
Intersection d'une droite et d'une sphère 90
Section plane de la sphère 98
Plans tangents à la sphère 111
Sphères circonscrite et inscrite à un tétraèdre 117
Exercices 120

CHAPITRE VIII. — **Cônes et cylindres à directrice circulaire.** 125
Propriétés géométriques du cône 128
Propriétés géométriques du cylindre 125
Détermination d'un point d'une surface conique ou cylindrique 130
Intersection d'une droite et d'une surface conique ou cylindrique 138
Problèmes sur les plans tangents 144
Ombres 152
Contours apparents. Représentation des cônes et cylindres . . 157
Exercices 165

CHAPITRE IX. — **Sections planes des cônes et cylindres** . . 168
Sections planes du cône 168
Détermination des points à l'infini dans les sections planes du cône 182
Sections planes du cylindre 188
Exercices 196

CHAPITRE X. — **Cônes et cylindres circonscrits à la sphère.** 198
Cône circonscrit 198
Cylindre circonscrit 209
Exercices 212

CHAPITRE XI. — **Ombres de la sphère** 213
Ombre au flambeau 213
Ombre au soleil 222
Exercices 227

CHAPITRE XII. — **Surfaces topographiques** 229
Représentation d'une surface par des courbes de niveau . . . 229
Problèmes relatifs aux courbes de niveau 231
Planimétrie. Nivellement 240
Signes et teintes conventionnels 246
Mouvements du sol 249
Lecture de la Carte d'État-Major 252

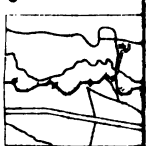
EPURES proposées aux concours d'admission :
à l'*Institut Agronomique* 257
à l'*École Navale* 260
à l'*École spéciale Militaire de Saint-Cyr* 262

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.

ABRÉVIATIONS.

Ville Fortifiée

Lignes, Retranch.ts R



Ville Fermée

Ville Ouverte

Bourg ou Ville

Clôtures

Clôtures en pierre

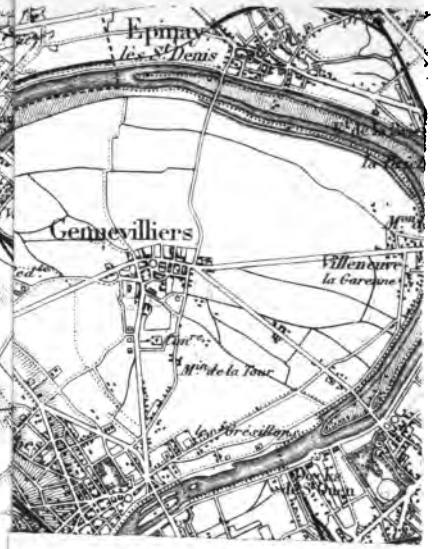
Clôtures en fossés

Clôtures en levée de terre.

Clôtures en haie.

Maladrerie.	Briq.te Briqueterie.	Et.g Etang.
Mas.	M.in Moulin.	V.er Vivier.
Métairie.	Carr.e Carrière.	M.s Marais.
Ferme.	Sal. Saline.	Fl. Fleuve.
Locature.	E. Min. Eau Minérale.	R. Rivière.
Borde.	R.te Route.	T.nt Torrent.
Cense.	Nat.le Nationale.	R.au Ruisseau.
Grange.	Dép.le Départementale.	P.t Pont.
Buron.	Ch.in Chemin.	F.ne Fontaine.
Jasse.	Carref.r Carrefour.	V.ée Vallée.
Barin.	Et.le Etoile.	V.on Vallon.
Cayolar.	Emb.re Embarcadère.	Q.r Quartier.
Orry.	St.on Station.	C.al Canal.
Cortal.	P.ge Passage.	Roub.n Roubine.
Habert.	B.re Barrière.	Ec.se Ecluse.
Baraque.	G.d P.t V.x etc. Grand, Petit, Vieux, etc.	Aq.uc Aqueduc.
Cabane.	I. Ile.	Ch.ne Chaine.
Ecurie.	Pl.au Plateau.	M.t Mont.
Vacherie.	R.au Radeau.	M.gne Montagne.
Bergerie.	C. Cap.	Sam.t Sommet.
Chalet.	P.te Pointe.	P. Pic.
Etablissement.	P.t Port.	Aig.le Aiguille.
Usine.	Ch.ée Chaussée.	R.er Rocher.
Fabrique.	J.ée Jetée.	G.ge Gorge.
Manufacture.	Dig. Digue.	Gl.er Glacier.
Scierie.	B.che Bouche.	F.t Forêt.
Forge.	Emb.ure Embouchure.	B. Bois.
Papeterie.	Lag. Lagune.	R.ise Remise.
Fonderie.	L.de Lande.	Sap.re Sapinière.
Verrerie.	P. Parc à Bestiaux.	Arb. Arbre.
Poudrerie.	L.te Lette.	B.on Buisson.
Salpêtrerie.	L. Lac.	Etc.
Tuilerie.	B.in Bassin.	

Maisons
Laffitte
de Maisons
Mesnil-le-Roi
la Tour


Epinay
lès St Denis
Gennevilliers
Villeneuve
la Garenne
Min de la Tour

Librairie VUIBERT et NONY, 63, boul^d Saint-Germain, PARIS, 5e.

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE

par H. Vuibert (18e année) : *Instruction, Écoles spéciales.* — Un beau vol. 18/12^cm, de 1128 pages, broché, 3 fr. 50 ; cartonné toile rouge 4 fr. 50

Il n'est pas une famille un peu éclairée, en France, qui ne soit appelée à avoir entre les mains l'*Annuaire de la Jeunesse ;* c'est un guide *indispensable* à tous les pères de famille soucieux de l'éducation et de l'avenir de leurs enfants.

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

Physique et Chimie, par J. Basin, professeur agrégé au lycée de Lille. — Vol. 19/13^cm.

Physique : cl. de Math. A et B, broché, 3 fr. ; cart. . . . . 3 fr. 50
Chimie : cl. de Math. A et B, broché, 2 fr. 50 ; cart. . . . . 3 fr. »

Sciences naturelles, par E. Caustier, professeur au lycée Saint-Louis. *Histoire naturelle et Hygiène* (classes de Philosophie A et B et de Mathématiques A et B et candidats à Saint-Cyr). — Vol. 16/11^cm de 840 pages, avec 892 gravures, 11e édition . . . . . 4 fr. 50

ANNALES DES BACCALAURÉATS SCIENTIFIQUES contenant les sujets de mathématiques, de physique et chimie donnés dans toutes les Facultés. — Chaque année forme un volume 18/12^cm, broché 2 fr. 75

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (32e année), publié par H. Vuibert. — Format 28/22^cm, avec figures et épures. Abonnement : France, 5 fr. ; Etranger . . . . . 6 fr. »

PROBLÈMES DE BACCALAURÉAT

I. *Mathématiques,* par H. Vuibert. — *4e édition* renfermant 681 problèmes d'arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, géométrie descriptive, mécanique, cosmographie, avec les solutions. — Un vol. 22/14^cm, de 528 pages en petit texte . . . . . 5 fr. »

II. *Physique et Chimie,* par Emile Bouant, *5e édition.* — Un vol. 22/14^cm, avec les solutions . . . . . 3 fr. »

LE PROBLÈME DE PHYSIQUE ÉLÉMENTAIRE (Principes et Exemples de solutions), à l'usage des élèves des classes de Première C et D et de Mathématiques A et B et des candidats aux Baccalauréats scientifiques et aux Ecoles, par A. Maillard. — Vol. 22/14^cm, de 420 pages, contenant 644 problèmes, dont 221 résolus, avec 195 figures, broché . . 3 fr. »

LE PROBLÈME DE CHIMIE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des mêmes élèves, par A. Maillard. — Vol. 22/14^cm . . . . . 2 fr. »

LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE, à l'usage des élèves de Mathématiques et des candidats au Baccalauréat, par T. Caronnet. — Vol. 22/14^cm, avec figures.

Exécution des épures et lavis (Instructions et conseils) 10e édit. avec 28 figures dans le texte. . . . . 1 fr. »

Cette brochure, écrite par une sommité de l'enseignement du dessin, rendra, les plus grands services aux jeunes gens faisant du dessin graphique ; elle est indispensable à ceux qui se destinent aux écoles spéciales.

Cours et Traités de Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences naturelles, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire et des candidats au baccalauréat et aux écoles (Voir le Catalogue qui est envoyé franco sur demande).

Recueil de Problèmes et Exercices de Mathématiques, Physique, Chimie, à l'usage des candidats au baccalauréat et aux écoles. (Consulter le Catalogue).

Bar-le-Duc. — Imp. Comte-Jacquet, Facdouel, Dir.

3 2044 079 969 960